

SVEUČILIŠTE U SPLITU
SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE
Studij konstrukcijskog strojarstva

Kolegij: IZBOR MATERIJALA

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA
(Autorizirani nastavni materijali)



Autor: Igor Gabrić

Split, lipanj 2024.

PREDGOVOR

Zbirka riješenih zadataka iz kolegija Izbor materijala namijenjena je studentima treće godine stručnog preddiplomskog studija Konstrukcijsko strojarstvo.

Ova zbirka u cijelosti obuhvaća gradivo kolegija Izbor materijala, a izrađena je na temelju zadataka rješavanih na auditornim vježbama tijekom proteklih nekoliko akademskih godina. Slični zadaci se javljaju na kolokvijima i ispitima te su osnova za izradu stručnog projekta studenata. Ova zbirka se može smatrati nadopunom auditornih vježbi u okviru koje je dan veći broj zadataka koji se ne stigne odraditi na vježbama. Preporuka je da se ova zbirka koristi u kombinaciji sa ostalim nastavnim materijalima dostupnim na moodle portalu kolegija Izbor materijala (skripta i prezentacije s predavanja) te ostale dostupne literature iz kolegija Nauka o čvrstoći i Termodinamika u okviru moodle portala odgovarajućih kolegija.

Zbirka je podijeljena u sedam logičkih cjelina od kojih se svaka obrađuje u više termina auditornih vježbi.

U prvom dijelu su riješeni zadaci iz područja primjene nauke o čvrstoći, termodinamike, mehanike loma i plastične deformacije za izbor materijala. Drugi dio obuhvaća osnove izbora materijala za slučaj problema s jednim ciljem i jednim aktivnim ograničenjem.

U trećem dijelu dati su primjeri problema s jednim ciljem i dva aktivna ograničenja, dok su u četvrtom dijelu riješeni problemi s dva cilja i jednim aktivnim ograničenjem. Peti dio obuhvaća riješene zadatke primjenom subjektivne metode težinskih faktora. U šestom dijelu su primjeri zadataka izbora materijala i oblika. Sedmi dio obuhvata izbor proizvodnih procesa i proizvodnog lanca.

Pregled korištene literature može se pronaći na kraju nastavnih materijala čime je omogućeno dodatno produbljivanje znanja zainteresiranim studentima.

Autor

Sadržaj

1	SVOJSTVA MATERIJALA.....	5
1.1	Zadaci iz područja mehanike i nauke o čvrstoći	5
1.1.1	Zadatak 1.1 – Vlačno opterećeni štap jednom silom na kraju štapa	6
1.1.2	Zadatak 1.2 – Vlačno opterećeni štap s tri aksijalne sile.....	10
1.1.3	Zadatak 1.3 – Savijanje grede opterećene koncentriranom silom.....	14
1.1.4	Zadatak 1.4 – Ploča opterećena kontinuiranim opterećenjem.....	18
1.1.5	Zadatak 1.5 – Uvijanje vratila	25
1.1.6	Zadatak 1.6 – Uvijanje vratila	29
1.1.7	Zadatak 1.7 – Elastično izvijanje (po Euleru)	34
1.1.8	Zadatak 1.8 – Višeosno naprezanje	38
1.2	Zadaci iz područja plastične deformacije materijala	44
1.2.1	Zadatak 2.1 – Tečenje materijala: Savijanje štapa elastično - idealno plastičnog materijala.....	44
1.2.2	Zadatak 2.2 – Tečenje materijala: Uvijanje štapa od elastično-idealno plastičnog materijala.....	48
1.3	Zadaci iz područja koncentracije naprezanja i mehanike loma.....	51
1.3.1	Zadatak 3.1 – Koncentracija naprezanja	51
1.3.2	Zadatak 3.2 – Stakleni podni paneli – lomna žilavost.....	54
1.3.3	Zadatak 3.3 – Lomna žilavost – Ekspertiza loma tlačne posude za LPG	56
1.3.4	Zadatak 3.4 – Lomna žilavost – uzdužni zavari na tlačnom cjevovodu.....	65
1.4	Zadaci iz područja termodinamike	68
1.4.1	Zadatak 4.1 – Toplinska vodljivost – pločasti izmjenjivač topline.....	68
1.4.2	Zadatak 4.2 – Toplinsko širenje – Aluminijska cijev čvrsto učvršćena na betonski zid.....	72
1.4.3	Zadatak 4.3 – Toplinska difuzivnost	74
1.4.4	Zadatak 4.4 – Specifični toplinski kapacitet	76
1.5	Zadaci iz područja dinamike	77
1.5.1	Zadatak 5.1 – Centrifugalne sile.....	77
2	OSNOVE IZBORA MATERIJALA.....	81
2.1.1	Zadatak 1 - Izbor materijala za lako veslo	82
2.1.2	Zadatak 2 - Izbor materijala za podlogu reflektora velikih teleskopa.....	90
2.1.3	Zadatak 3 - Izbor materijala za vitke i lagane nogice stolića	97
2.1.4	Zadatak 4 - Trošak konstrukcijskih materijala za gradnju stambenih objekata ..	102

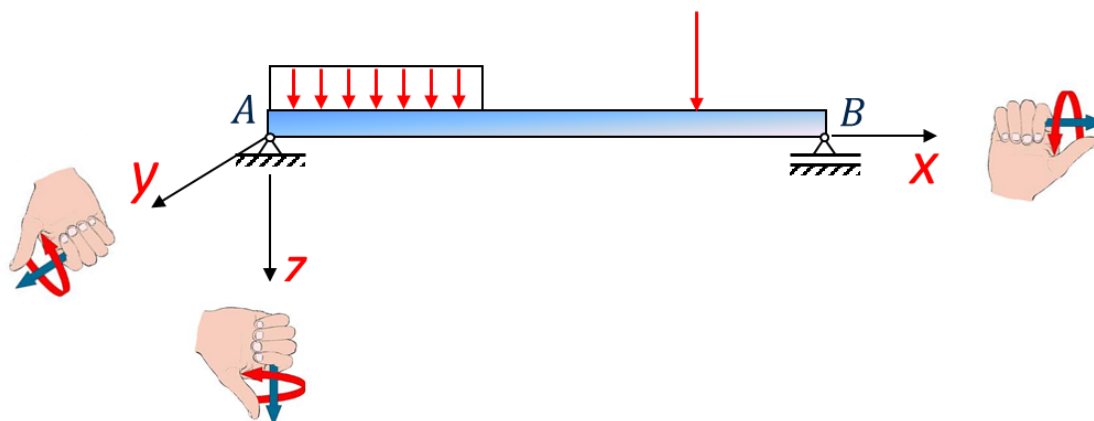
2.1.5	Zadatak 5 – Izbor materijala učinkovitog zamašnjaka	109
2.1.6	Zadatak 6 – Izbor materijala za opruge	114
2.1.7	Zadatak 7 – Izbor materijala za brtve	120
2.1.8	Zadatak 8 – Izbor materijala za posude pod tlakom.....	124
2.1.9	Zadatak 9 – Izbor materijala za izolaciju kratkotrajnog izotermnog spremnika .	129
3	IZBOR MATERIJALA U SLUČAJU VIŠE OGRANIČENJA I JEDNOG CILJA.....	134
3.1.1	Zadatak 1 – Klipnjača motora visokih performansi	134
3.1.2	Zadatak 2 – Lagana tlačna posuda	140
3.1.3	Zadatak 3 – Materijal za pokrov bazena	145
4	IZBOR MATERIJALA U SLUČAJU JEDNOG OGRANIČENJA I VIŠE CILJEVA .	152
4.1.1	Zadatak 1 – Lake i vitke nogice stolića	152
4.1.2	Zadatak 2 – Kućište elektroničkog uređaja	160
4.1.3	Zadatak 3 – Čeljusti disk kočnice.....	167
5	SUBJEKTIVNE METODE ODLUČIVANJA – METODA TEŽINSKIH FAKTORA	177
5.1.1	Zadatak 1 – Izbor materijala za kaljužnu pumpu	177
6	IZBOR MATERIJALA I OBLIKA	180
6.1.1	Zadatak 1 – Nosač krila jedrilice.....	180
6.1.2	Zadatak 2 – Okvir za bicikl	187
6.1.3	Zadatak 3 – Nogice stolića - vitke ili lagane	193
6.1.4	Zadatak 4 – Podne nosive grede	201
6.1.5	Zadatak 5 – Laka greda specificirane čvrstoće	211
6.1.6	Zadatak 6 – Oblici koji se lako savijaju	217
6.1.7	Zadatak 7 – Opruge visoke učinkovitosti.....	221
6.1.8	Zadatak 8 – Određivanje faktora oblika prema eksperimentalnim podacima.....	227
6.1.9	Zadatak 9 – Određivanje faktora oblika čelične mosne konstrukcije	228
6.1.10	Zadatak 10 – Jeftina i kruta greda	228
7	IZBOR PROIZVODNOG PROCESA.....	237
7.1.1	Zadatak 1 – Izbor proizvodnog lanca za izradu vratila	237
7.1.2	Zadatak 2 – Proces oblikovanja čelične klipnjače.....	256
8	Literatura	266

1 SVOJSTVA MATERIJALA

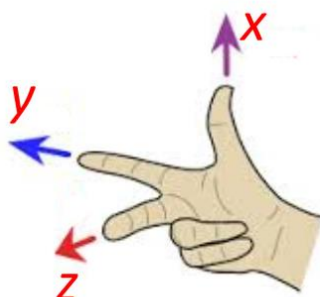
Zadaci u ovom poglavlju zbirke su dio gradiva koji se odnosi na znanja stečena u okviru kolegija Tehnička mehanika, Nauka o čvrstoći, Elementi strojeva, Termodinamika, Mehanika loma i Plastična deformacija materijala, ali ovdje s primjenom na izbor konstrukcijskih materijala.

1.1 Zadaci iz područja mehanike i nauke o čvrstoći

Uvodno se treba prisjetiti načina definiranja pozitivnog koordinatnog sustava te definicije pozitivnih momenata, poprečnih i uzdužnih sila. Na slici 1.1. prikazana je jednostavno opterećena greda s ucrtanim desnim koordinatnim sustavom. Za crtanje koordinatnog sustava primijenjeno je pravilo desne ruke (slika 1.2).

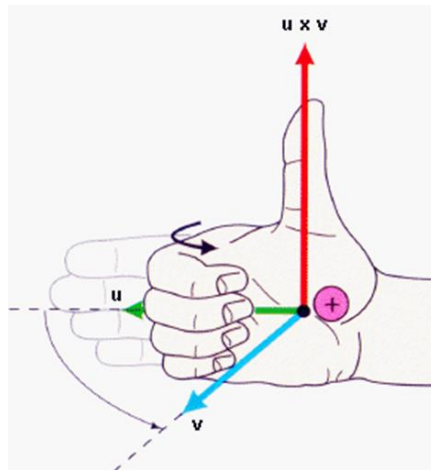


Slika 1.1 Pozitivni koordinatni sustav



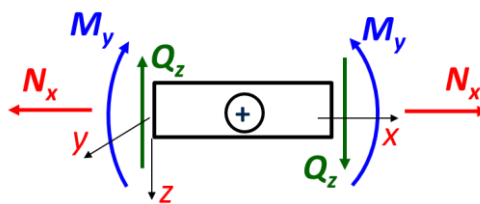
Slika 1.2 Pravilo desne ruke za crtanje koordinatnog sustava

Pozitivni smjer momenata duž koordinatnih određuje se tako da se desnom rukom obuhvati os gdje je palac usmjeren u pozitivnom smjeru, a svinuti prsti pokazuju smjer pozitivnog momenta (slika 1.3).



Slika 1.3 Određivanje pozitivnog momenta za koordinatnu os

Na slici 1.4 prikazan je pozitivni element (s ucrtanim desnim koordinatnim sustavom) za određivanje pozitivnih smjerova momenata, poprečnih i uzdužnih sila s pozitivne i negativne strane presjeka u odnosu na pozitivni smjer koordinatne osi.

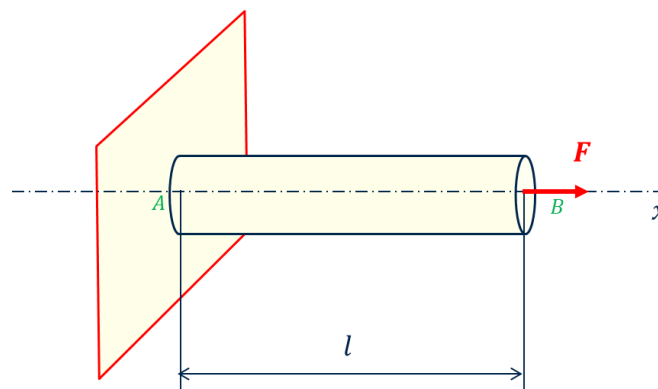


Slika 1.4 Pozitivni element

1.1.1 Zadatak 1.1 – Vlačno opterećeni štap jednom silom na kraju štapa

Odabrati materijal za lagani štap, duljine l zadan i opterećen silom F (slika 1.5), prema kriteriju:

- krutosti ($u_B < \delta_{dop}$)
- čvrstoće (zadan faktor sigurnosti S)



Slika 1.5 Skica učvršćenog i opterećenog štapa

Zadane veličine: F, l, S, δ_{dop} ,

Slobodne veličine za izbor materijala:

A – površina poprečnog presjeka

E – modul elastičnosti

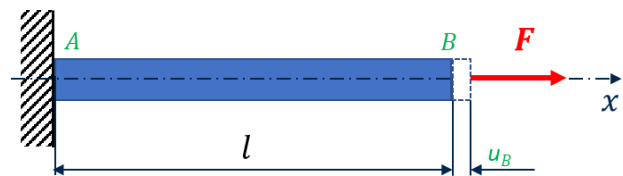
ρ – gustoća materijala

R_p – granica tečenja (plastičnosti) materijala

Rješenje

a) kriterij krutosti ($u_B < \delta_{dop}$)

Ograničenje krutosti:



$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E \cdot \varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{u_B}{l} \end{aligned} \right\} \quad u_B = l \cdot \frac{\sigma}{E} = \frac{l \cdot F}{A \cdot E} \leq \delta_{dop} \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{l \cdot F}{\delta_{dop} \cdot E}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Obzirom da je, uz ograničenje krutosti, cilj minimalizacija mase štapa treba odrediti kombinaciju svojstava materijala čijom se maksimalizacijom minimalizira masa.

Masa štapa je:

$$m = A \cdot l \cdot \rho$$

$$m \geq \frac{l \cdot F}{\delta_{dop} \cdot E} \cdot l \cdot \rho$$

$$m \geq \frac{F}{\delta_{dop}} \cdot l^2 \cdot \frac{\rho}{E} \quad \Rightarrow \quad M_1 = \frac{E}{\rho}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava materijala $M_1 = \frac{E}{\rho}$ minimalizira se masa štapa.

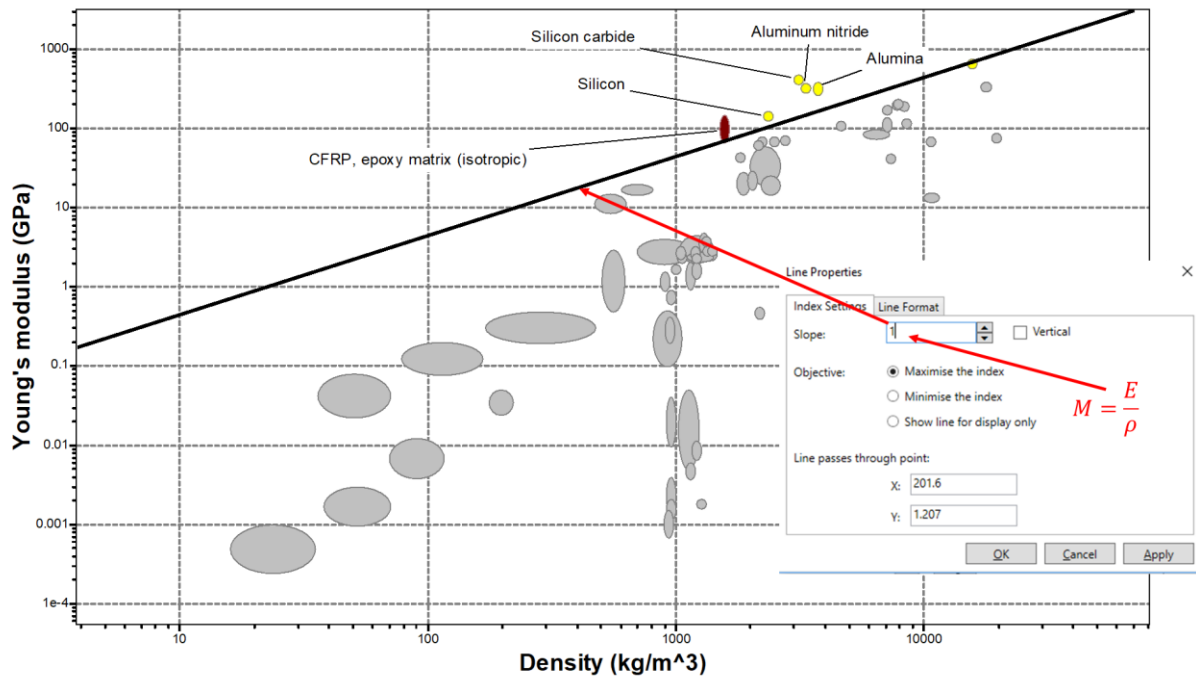
Kombinacija svojstava materijala koja se koristi za optimiranje cilja naziva se **indeks materijala**.

Izbor materijala se vrši korištenjem **dijagrama svojstava materijala** koji se može generirati primjenom računalnih programa za izbor materijala. U svrhu izbora materijala primjenom

dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije

$$\log E = 1 \cdot \log \rho + \log M$$

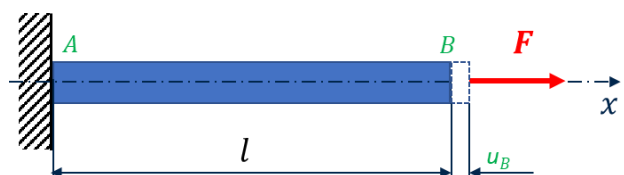
Što je analogno jednadžbi pravca $y = k \cdot x + l$ u dijagramu kojemu je os ordinata modul elastičnosti u logaritamskom mjerilu $\log E$, a apscisa gustoća u logaritamskom mjerilu $\log \rho$. Koeficijent uz $\log \rho$ predstavlja nagib pravca u dijagramu prikazanom na slici 1.6.



Slika 1.6 Dijagram svojstava materijala $\log E - \log \rho$

Pomicanjem smjernica za izbor (pravca nagiba 1 u dijagramu) prema gornjem lijevom uglu izoliraju se najbolji materijali. Najviše rangirani materijali za laki kruti štup uz ograničenje krutosti su CFRP („Carbon Fibre Reinforced Plastic“), keramike (aluminijev nitrid, aluminijev oksid, silicijev karbid i silicij). U ovom izboru korištena je relativno mala baza podataka koja sadrži samo 100 različitih materijala.

b) kriterij čvrstoće ($\sigma_{max} < \sigma_{dop}$)



$$\left. \begin{aligned} \sigma = \frac{F}{A} &\leq \sigma_{dop}, \\ \sigma_{dop} &= \frac{R_p}{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \leq \frac{R_p}{S} \Rightarrow A \geq \frac{F \cdot S}{R_p}$$

Obzirom da je, uz ograničenje čvrstoće, cilj minimalizacija mase štapa treba odrediti kombinaciju svojstava materijala čijom se maksimalizacijom minimalizira masa.

Masa štapa je:

$$m = A \cdot l \cdot \rho$$

$$m \geq \frac{F \cdot S}{R_p} \cdot l \cdot \rho$$

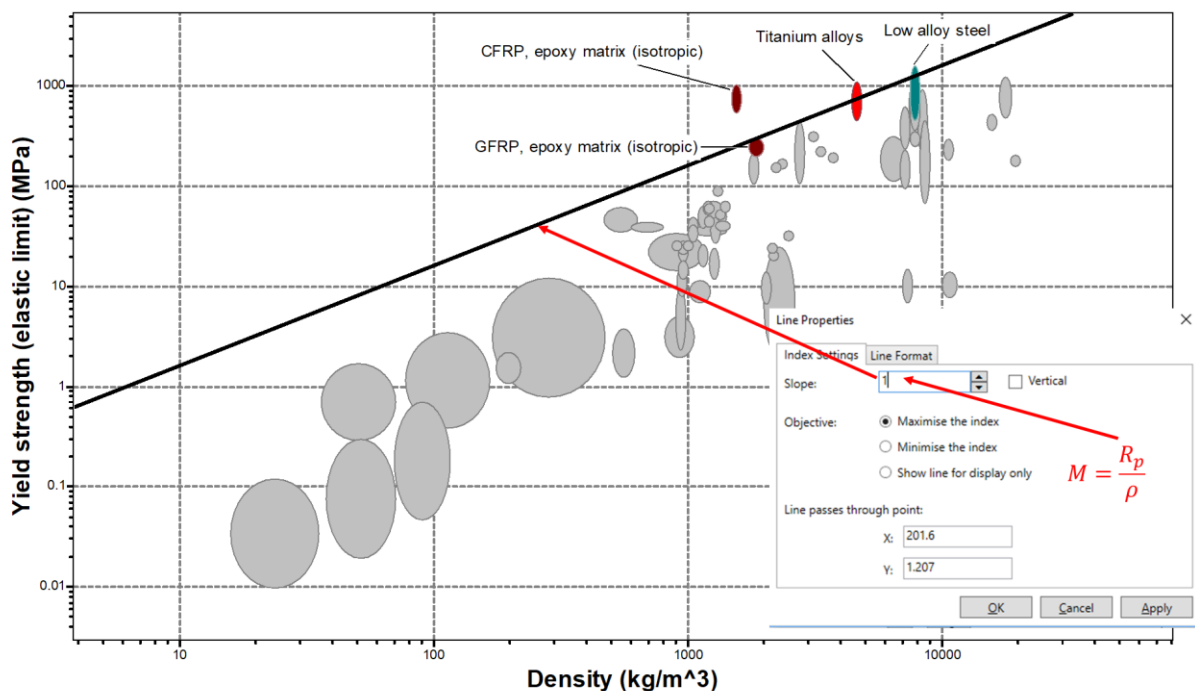
$$m \geq F \cdot S \cdot l \cdot \frac{\rho}{R_p} \Rightarrow M_2 = \frac{R_p}{\rho}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava materijala $M_2 = \frac{R_p}{\rho}$ minimalizira se masa štapa.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije

$$\log R_p = 1 \cdot \log \rho + \log M$$

Koeficijent uz $\log \rho$ predstavlja nagib pravca u dijagramu prikazanom na slici 1.7.



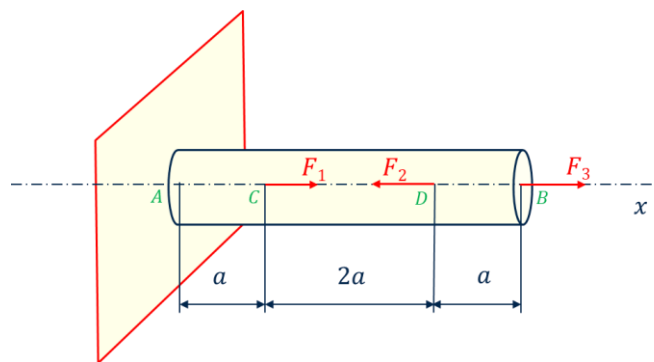
Slika 1.7 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$

Pomicanjem smjernica za izbor (pravca nagiba 1 u dijagramu) prema gornjem lijevom uglu izoliraju se najbolji materijali. Najviše rangirani materijali za laki kruti štap uz ograničenje čvrstoće su CFRP („Carbon Fibre Reinforced Plastic“), GFRP („Glass Fibre Reinforced Plastic“), titan legure i niskolegirani čelici.

Može se zaključiti da je najbolji materijal (iz dostupne baze podataka) za izradu laganog štapa uz ograničenje krutosti i čvrstoće GFRP.

1.1.2 Zadatak 1.2 – Vlačno opterećeni štap s tri aksijalne sile

Za štap zadan i opterećen prema slici 1.8 skicirati i kotirati dijagrame uzdužnih sila N_x , naprezanja σ_x , deformacije ε_x i pomaka u . Odrediti koji su materijali najbolji za ovu svrhu ako je ograničenje krutost štapa (pomak $u_B \leq \delta_{dop}$), a cilj minimalna masa.



Slika 1.8 Skica učvršćenog i opterećenog štapa

Zadane veličine: $F_1 = 3F$,

$F_2 = F_3 = F$

a

Slobodne veličine za izbor materijala:

A – površina poprečnog presjeka

E – modul elastičnosti

ρ – gustoća materijala

Rješenje**Uvjeti ravnoteže**

Prvi korak je postavljanje uvjeta ravnoteže i određivanje reakcije u osloncu:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_A + F_1 - F_2 + F_3 = 0$$

$$R_A = F_1 - F_2 + F_3 = 3F$$

Dio nosača**a) Uzdužne sile****b) Naprezanja****c) Deformacije**

$$0 \leq x \leq a \quad \Rightarrow \quad N_x = R_A = 3F \quad \sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{3F}{A} \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{3F}{AE}$$

$$a \leq x \leq 3a \quad \Rightarrow \quad N_x = R_A - F_1 = 0 \quad \sigma_x = 0 \quad \varepsilon_x = 0$$

$$3a \leq x \leq 4a \quad \Rightarrow \quad N_x = R_A - F_1 + F_2 = F \quad \sigma_x = \frac{F}{A} \quad \varepsilon_x = \frac{F}{AE}$$

d) Pomaci

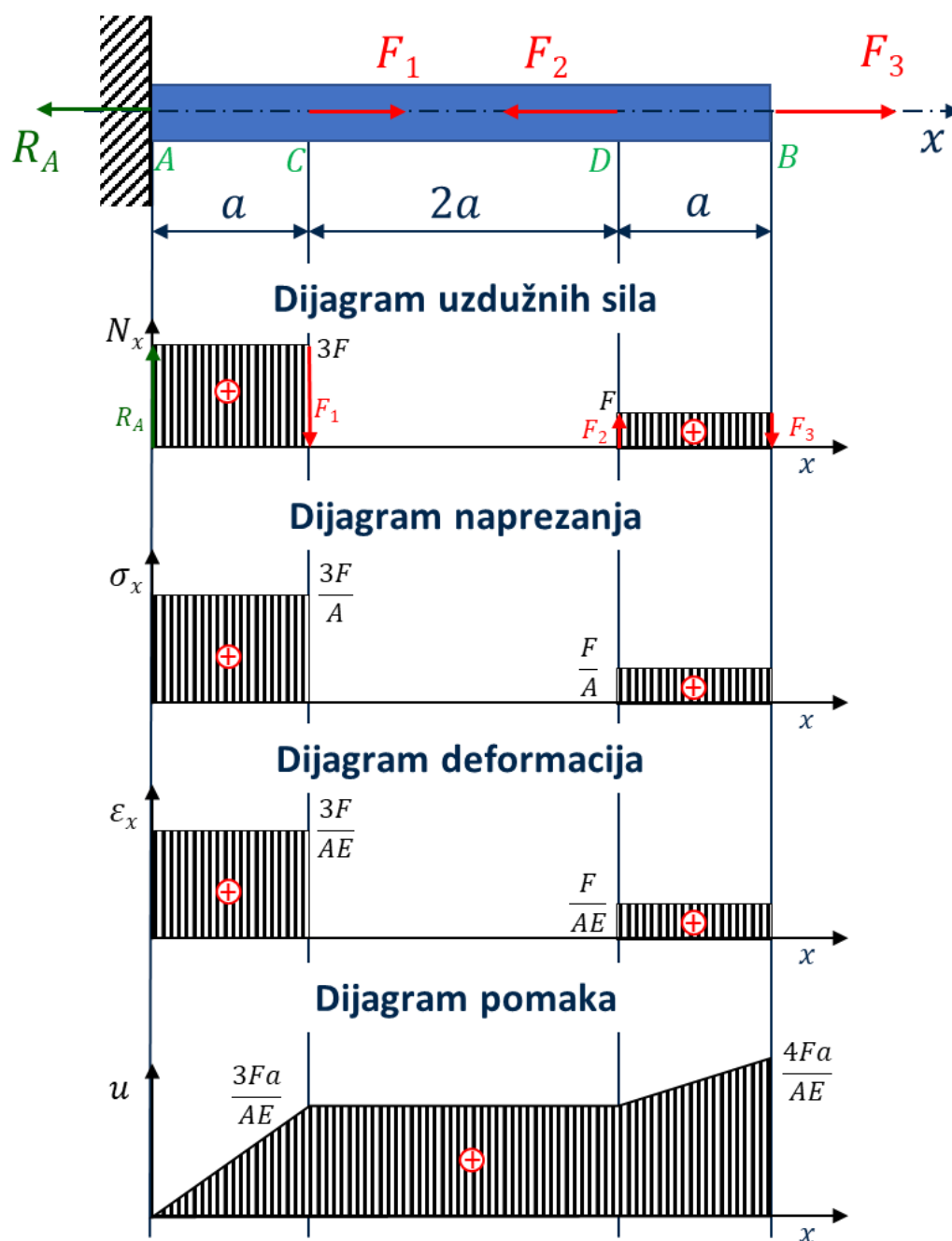
$$0 \leq x \leq a \quad \Rightarrow \quad u(x) = \varepsilon_x \cdot x = \frac{3F}{AE} \cdot x \quad \Rightarrow \quad u_C = u(a) = \frac{3Fa}{AE}$$

$$a \leq x \leq 3a \quad \Rightarrow \quad u(x) = u_C + \varepsilon_x \cdot (x - a) = u_C \quad \Rightarrow \quad u_D = u_C = \frac{3Fa}{AE}$$

$$3a \leq x \leq 4a \quad \Rightarrow \quad u(x) = u_C + \varepsilon_x \cdot (x - 3a) = u_C + \frac{F}{AE} \cdot (x - 3a)$$

$$\Rightarrow u_B = u(4a) = \frac{4Fa}{AE}$$

Prema dobivenim vrijednostima uzdužnih sila, naprezanja, deformacija i pomaka za sve segmente štapa skicirani su odgovarajući dijagrami prikazani na slici 1.9.



Slika 1.9 Dijagrami uzdužnih sila, naprezanja, deformacija i pomaka

e) Minimalizacija mase uz ograničenje krutosti $u_B \leq \delta_{dop}$

Ograničenje krutosti:

$$u_B = \frac{4 \cdot F \cdot a}{A \cdot E} \leq \delta_{dop} \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{4 \cdot F \cdot a}{\delta_{dop} \cdot E}$$

Treba odrediti kombinaciju svojstava materijala čijom se maksimalizacijom minimalizira masa uz aktivno ograničenje krutosti štapa.

Masa štapa je:

$$m = A \cdot 4 \cdot a \cdot \rho$$

$$m \geq \frac{4 \cdot F \cdot a}{\delta_{dop} \cdot E} \cdot 4 \cdot a \cdot \rho$$

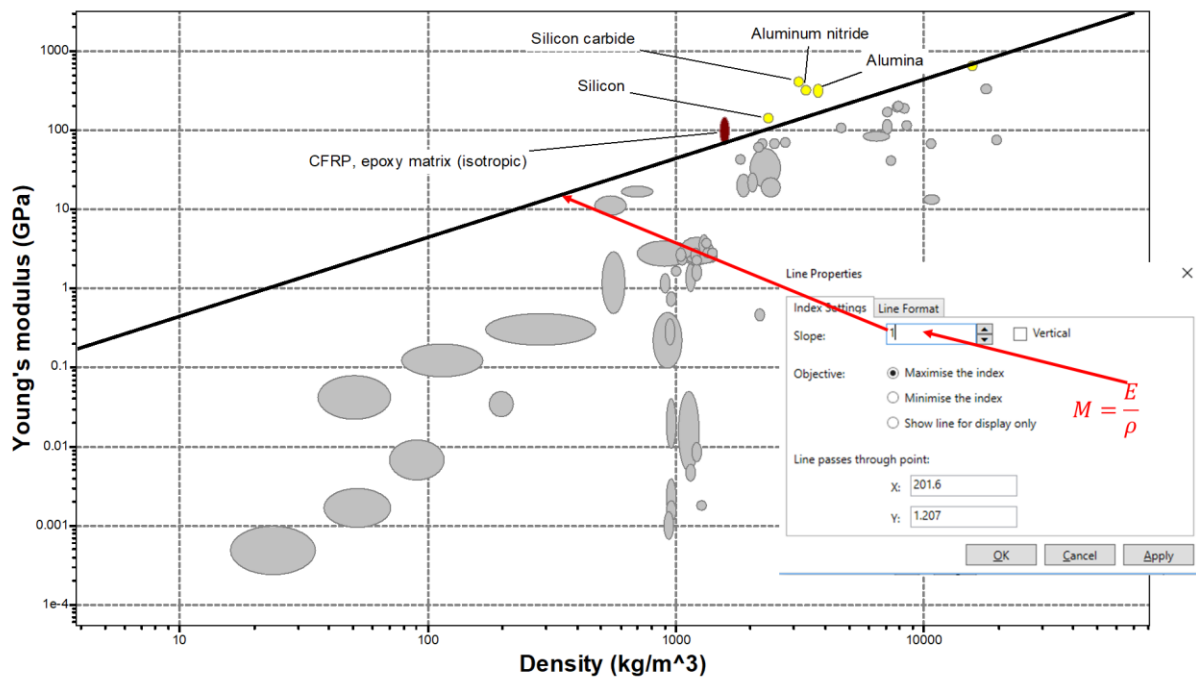
$$m \geq \frac{16F}{\delta_{dop}} \cdot a^2 \cdot \frac{\rho}{E}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava $M = \frac{E}{\rho}$ minimalizira se masa štapa.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije

$$\log E = 1 \cdot \log \rho + \log M$$

Koeficijent uz $\log \rho$ predstavlja nagib pravca u dijagramu kojem je os apscisa $\log \rho$, a os ordinata $\log E$ prikazanom na slici 1.10.

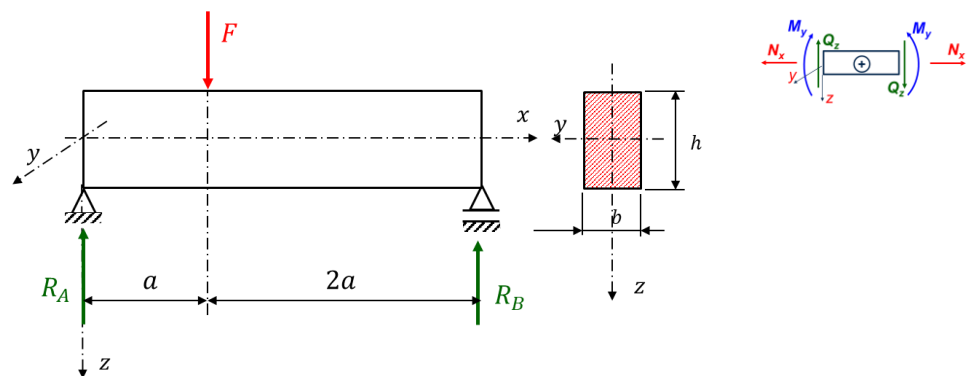
Slika 1.10 Dijagram svojstava materijala $\log E - \log \rho$

Pomicanjem smjernice za izbor nagiba „1“ prema gornjem lijevom kutu dijagrama izoliraju se najviše rangirani materijali. U ovom slučaju to su CFRP („Carbon Fibre Reinforced Plastic“), silicij karbid, aluminijski oksid i aluminijski nitrid.

1.1.3 Zadatak 1.3 – Savijanje grede opterećene koncentriranom silom

Za čvrstu gredu zadanu i opterećenu prema slici 1.11 odrediti najbolje materijale za **jeftinu** gredu iz postojeće baze podataka. Ograničenje dizajna je nosivost (čvrstoća uz faktor sigurnosti S), duljina grede $3a$ i širina presjeka grede b . Veličina slobodna za izbor je visina presjeka h .

Zanemariti vlastitu masu grede! Materijal mora imati izvrsnu sposobnost oblikovanja („5“). Nacrtati dijagrame poprečnih sila i momenata savijanja!



Slika 1.11 Skica učvršćene i opterećene grede

Zadane veličine: F, a, b, S

Slobodne veličine za izbor materijala:

h – visina pravokutnog poprečnog presjeka

R_p – granica tečenja (plastičnosti) materijala

ρ – gustoća materijala

Rješenje

a) Uvjeti ravnoteže – određivanje reakcija u osloncima

Prvi korak je postavljanje uvjeta ravnoteže i određivanje reakcije u osloncu:

$$\Sigma F_z = 0: \quad -R_A + F - R_B = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad -F \cdot a + R_B \cdot 3a = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow R_B = \frac{F}{3} \quad (1) \Rightarrow R_A = \frac{2 \cdot F}{3}$$

b) Momenti savijanja

$$0 \leq x \leq a$$

$$Q_z(x) = R_A = \frac{2}{3} \cdot F$$

$$M_y(x) = R_A \cdot x = \frac{2}{3} \cdot F \cdot x \quad (3)$$

$$M_y(a) = \frac{2}{3} \cdot F \cdot a \quad (4)$$

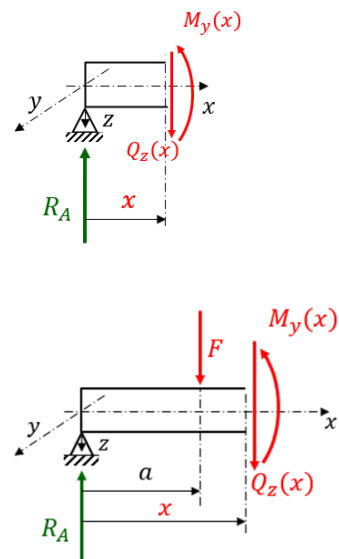
$$a \leq x \leq 3a$$

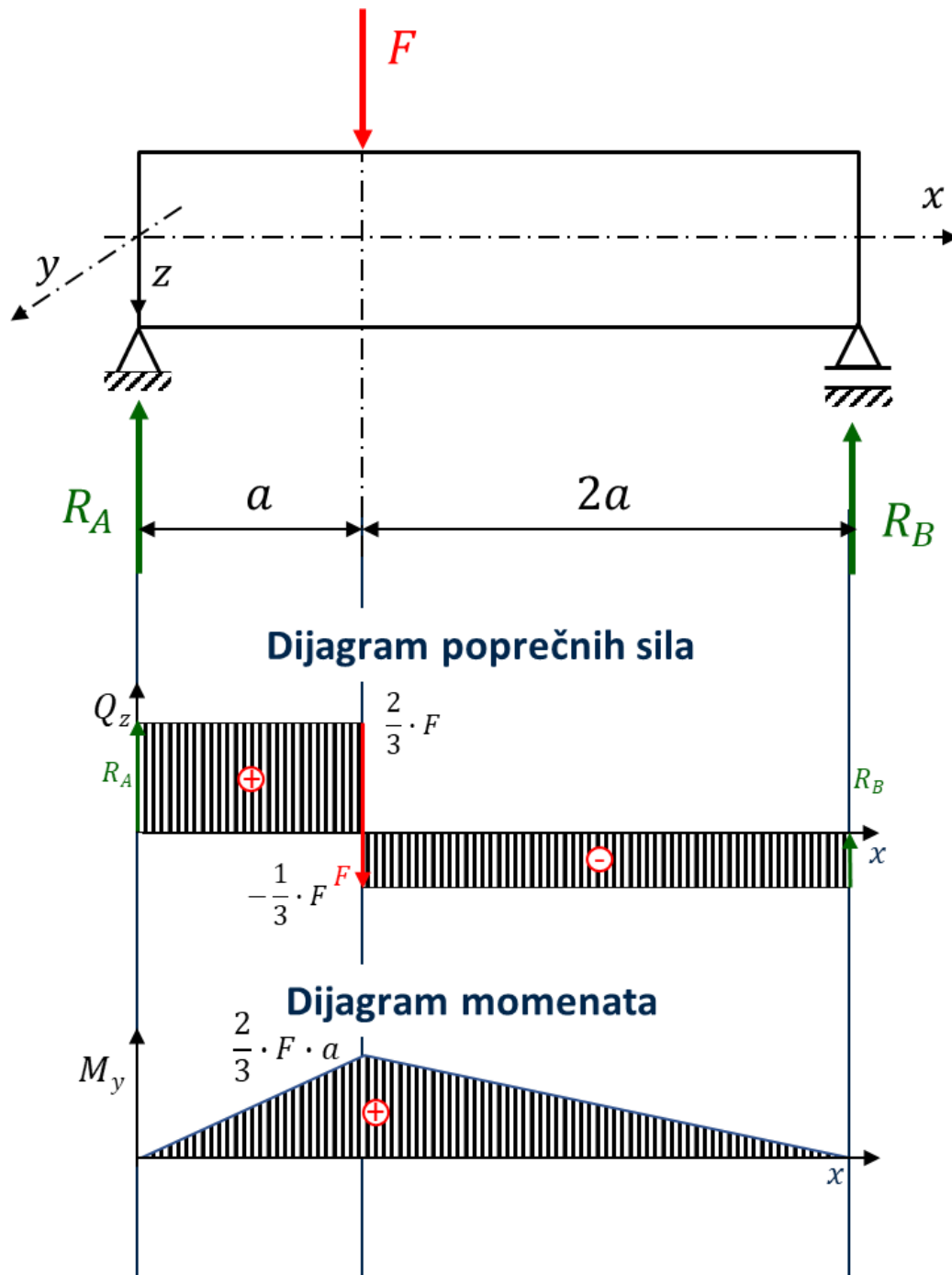
$$Q_z(x) = R_A - F = -\frac{1}{3} \cdot F \quad (5)$$

$$M_y(x) = \frac{2}{3} \cdot F \cdot x - F \cdot (x - a) \quad (6)$$

$$(3) \Rightarrow M_y(a) = \frac{2}{3} \cdot F \cdot a = M_{y,max}$$

Na temelju određenih reakcija i momenata savijanja crtaju se dijagrami poprečnih sila i momenata savijanja koji su prikazani na slici 1.12.





Slika 1.12 Dijagrami poprečnih sila i momenata

c) Određivanje indeksa materijala lake grede uz ograničenje čvrstoće

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} \leq \sigma_{dop} \quad W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{2}{3} \cdot F \cdot a}{\frac{b \cdot h^2}{6}} \leq \sigma_{dop} \Rightarrow \frac{4 \cdot F \cdot a}{b \cdot h^2} \leq \frac{R_p}{S} \Rightarrow h \geq \left(\frac{4 \cdot F \cdot a \cdot S}{b \cdot R_p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Obzirom da je visina presjeka h slobodna varijabla za podešavanje istu treba zamijeniti u izrazu za funkciju cilja tj. u izrazu za masu:

$$m = b \cdot h \cdot 3 \cdot a \cdot \rho \Rightarrow m \geq b \cdot \left(\frac{4 \cdot F \cdot a \cdot S}{b \cdot R_p} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot a \cdot \rho$$

Sređivanjem izraza slijedi:

$$m \geq (36 \cdot F \cdot S)^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\rho}{R_p^{1/2}}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava $M = \frac{R_p^{1/2}}{\rho}$ minimalizira se masa.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log R_p = 2 \cdot \log \rho + \log M$$

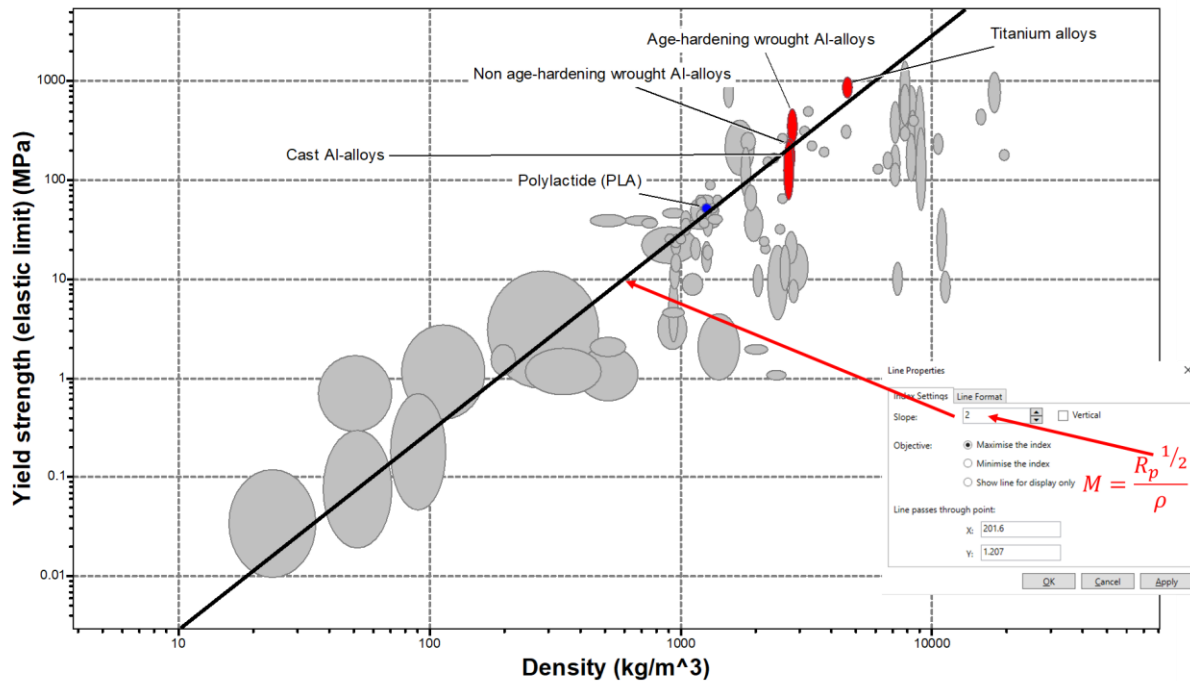
Obzirom na dodatno ograničenje na izvrsnu sposobnost oblikovanja („5”) ista treba implementirati u program za izbor materijala (slika 1.13).

	Minimum	Maximum
Castability		
Moldability		
Formability	5	
Machinability		
Weldability		
Solder/brazability		

Slika 1.13 Unos limitirajućeg ograničenja sposobnosti oblikovanja u programu Granta Edupack

Koeficijent uz $\log \rho$ predstavlja nagib pravca u dijagramu kojem je os apscisa $\log \rho$, a os ordinata $\log R_p$ prikazanom na slici 1.14.

Pomicanjem smjernice za izbor nagiba „2“ prema gornjem lijevom kutu dijagrama izoliraju se najviše rangirani materijali. Za laku gredu ograničenu čvrstoćom i izvrsnom sposobnošću oblikovanja to su ljevačke legure aluminija, PLA, dozrijevanjem očvrstive i dozrijevanjem neočvrstive gnječilačke legure aluminija i legure titana.

Slika 1.14 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$

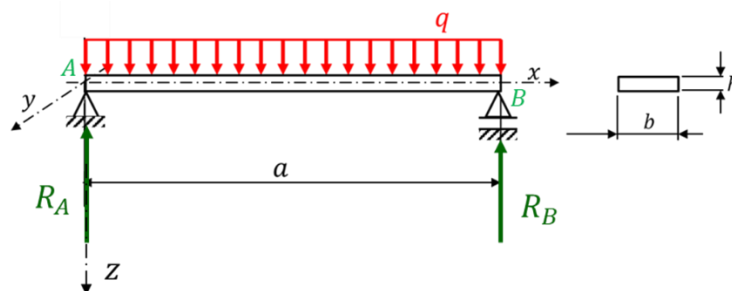
1.1.4 Zadatak 1.4 – Ploča opterećena kontinuiranim opterećenjem

Za **laku** ploču, zadanu i kontinuirano opterećenu prema slici 1.15 odrediti optimalni materijal (iz postojeće baze podataka) i to za slučaj dimenzioniranja prema kriteriju:

- čvrstoće materijala (zadan faktor sigurnosti S)
- krutosti materijala (zadan maksimalni dopušteni progib δ_{max}).

Materijal mora imati lomnu žilavost $K_{1c} \geq 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$, maksimalnu radnu temperaturu 500°C .

Odrediti maksimalni progib grede w_{max}



Slika 1.15 Skica jednostavno oslonjene i kontinuirano opterećene ploče

Zadane veličine: $a, q, S, \delta_{max}, K_{1c} \geq 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$

Slobodne veličine za izbor materijala:

h – visina pravokutnog poprečnog presjeka

R_p – granica tečenja (plastičnosti) materijala

E – modul elastičnosti materijala

ρ – gustoća materijala

Rješenje

a) Uvjeti ravnoteže – određivanje reakcija u osloncima

$$\Sigma F_z = 0: -R_A + q \cdot a - R_B = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0: -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + R_B \cdot a = 0 \quad (2)$$

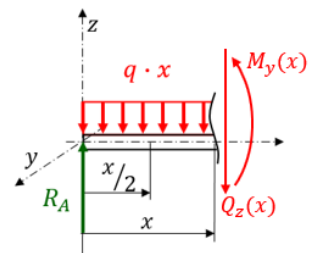
$$(2) \Rightarrow R_B = \frac{1}{2} \cdot q \cdot a \quad (1) \Rightarrow R_A = R_B = \frac{1}{2} \cdot q \cdot a$$

b) Maksimalni moment $M_{y,max}$

$$M_y(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} \quad / \quad \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = R_A - q \cdot x = \frac{1}{2} \cdot q \cdot a - q \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{M_{y,max}} = \frac{a}{2}$$

$$M_{y,max} = M_y\left(\frac{a}{2}\right) = q \cdot \frac{a^2}{4} - q \cdot \frac{a^2}{8} = q \cdot \frac{a^2}{8}$$



c) Određivanje indeksa materijala lake grede uz ograničenje čvrstoće

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} \leq \sigma_{dop} \quad \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S}$$

$$\sigma_{max} = \frac{q \cdot \frac{a^2}{8}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{3 \cdot q \cdot a^2}{4 \cdot b \cdot h^2} \leq \frac{R_p}{S} \quad \Rightarrow \quad h \geq \left(\frac{3 \cdot q \cdot a^2 \cdot S}{4 \cdot b \cdot R_p} \right)^{1/2}$$

Obzirom da je visina presjeka h slobodna varijabla za podešavanje istu treba zamijeniti u izrazu za funkciju cilja tj. u izrazu za masu:

$$m = b \cdot h \cdot a \cdot \rho$$

$$m \geq b \cdot \left(\frac{3 \cdot q \cdot a^2 \cdot S}{4 \cdot b \cdot R_p} \right)^{1/2} \cdot a \cdot \rho$$

$$m \geq b \cdot \left(\frac{3 \cdot q \cdot s}{4}\right)^{1/2} b^{-1/2} \cdot a^2 \cdot \frac{\rho}{R_p^{1/2}} \Rightarrow \mathbf{M_1 = \frac{R_p^{1/2}}{\rho}}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava materijala $M_1 = \frac{R_p^{1/2}}{\rho}$ minimalizira se masa grede.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log R_p = \mathbf{2} \cdot \log \rho + \log M_1$$

gdje je „2“ nagib smjernice „pravca“ za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$.

d) Određivanje indeksa materijala lake grede uz ograničenje krutosti

Uvjet krutosti:

$$w_{max} \leq \delta_{max}$$

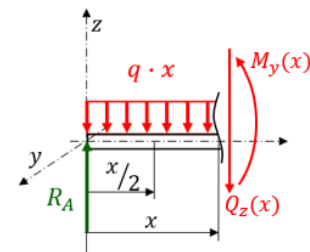
Progib duž grede se može odrediti korištenjem diferencijalne jednadžbe elastične linije:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I}$$

Moment savijanja duž grede je:

$$M_y(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{a}{2} \cdot q \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_y(x) = \frac{q}{2} \cdot (a \cdot x - x^2)$$



Integracijom diferencijalne jednadžbe elastične linije slijedi:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot (x^2 - a \cdot x) \quad / \quad \int$$

Integracijom diferencijalne jednadžbe elastične linije dobije se nagib elastične linije duž grede:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int (x^2 - a \cdot x) dx + C_1 = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - a \cdot \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad / \quad \int$$

Ponovnom integracijom slijedi jednačba progiba duž grede:

$$w(x) = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int \left(\frac{x^3}{3} - a \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx + C_1 \cdot x + C_2 = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^4}{12} - a \cdot \frac{x^3}{6} \right) + C_1 \cdot x + C_2$$

Konstante integracije određuju se primjenom rubnih uvjeta:

$$x = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{dw}{dx} \left(\frac{a}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{(a/2)^3}{3} - a \cdot \frac{(a/2)^2}{2} \right) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q \cdot a^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$x = 0 \Rightarrow w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Konačna jednačba za progib duž grede jest:

$$w(x) = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^4}{12} - a \cdot \frac{x^3}{6} \right) + \frac{q \cdot a^3}{24 \cdot E \cdot I} \cdot x$$

Obzirom da je greda simetrično opterećena maksimalni progib grede je u središtu grede:

$$w_{max} = w \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{(a/2)^4}{12} - a \cdot \frac{(a/2)^3}{6} \right) + \frac{q \cdot a^3}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{5 \cdot q \cdot a^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

U nastavku zbirke zadataka izrazi za maksimalni progib se neće izvoditi već će biti preuzeti iz literature poput „Priručnika s korisnim rješenjima“.

Uvrštavanjem dobivenog izraza za maksimalni progib u uvjet krutosti grede:

$$w_{max} \leq \delta_{max}$$

$$w_{max} = \frac{5 \cdot q \cdot a^4}{384 \cdot E \cdot I} \leq \delta_{max} \quad (3)$$

Aksijalni moment inercije za pravokutni presjek:

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (4)$$

Kombinacijom izraza (3) i (4):

$$\frac{5 \cdot q \cdot a^4}{32 \cdot E \cdot b \cdot h^3} \leq \delta_{max} \Rightarrow h \geq \left(\frac{5 \cdot q \cdot a^4}{32 \cdot E \cdot b \cdot \delta_{max}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

Masa grede je:

$$m = b \cdot h \cdot a \cdot \rho \quad (6)$$

Eliminacijom slobodne varijable uvrštavanjem izraza (5) u izraz (6):

$$m \geq b \cdot \left(\frac{5 \cdot q \cdot a^4}{32 \cdot E \cdot b \cdot \delta_{max}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot a \cdot \rho$$

Nakon sređivanja slijedi:

$$m \geq \left(\frac{5 \cdot q}{32 \cdot \delta_{max}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot b^{2/3} \cdot a^{7/3} \cdot \frac{\rho}{E^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad M_2 = \frac{E^{1/3}}{\rho}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava $M_2 = \frac{E^{1/3}}{\rho}$ minimalizira se masa grede.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log E = 3 \cdot \log \rho + \log M_1$$

gdje je „3“ nagib smjernice „pravca“ za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log E - \log \rho$.

Dodatna ograničenja lomne žilavosti $K_{1c} \geq 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ i maksimalne radne temperature $500 \text{ }^\circ\text{C}$ implementirana su u program za izbor materijala (slika 1.16).

▼ Mechanical properties			
	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation			% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10^7 cycles	50		MPa
Fracture toughness			MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

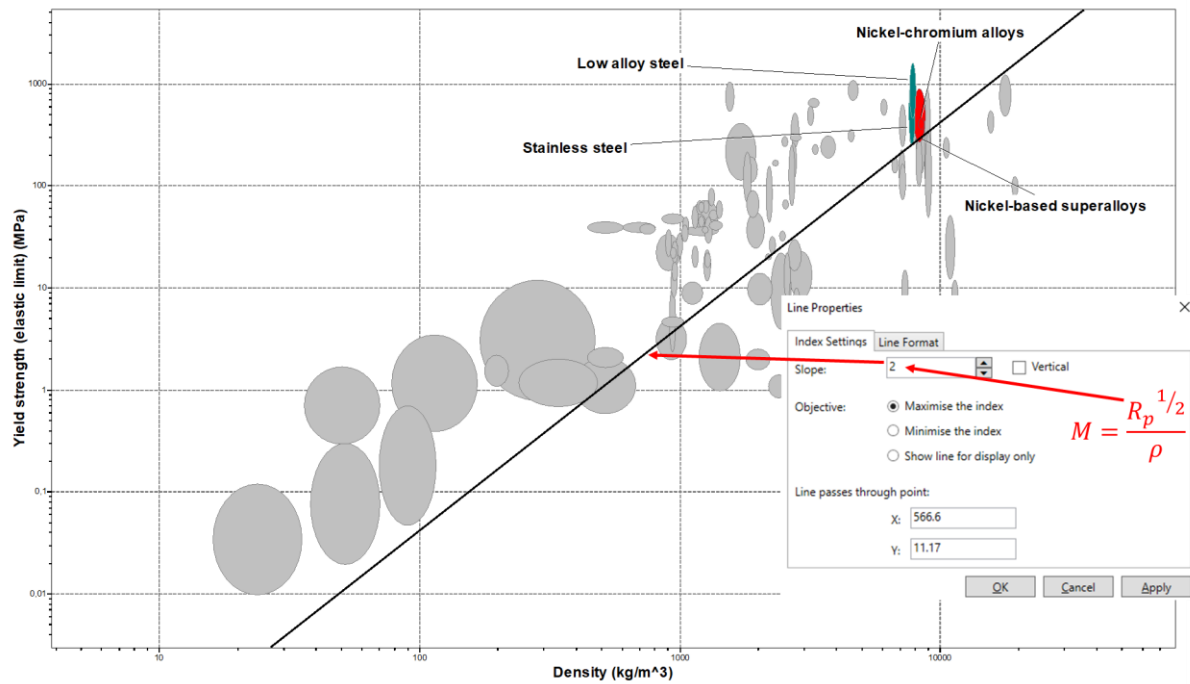
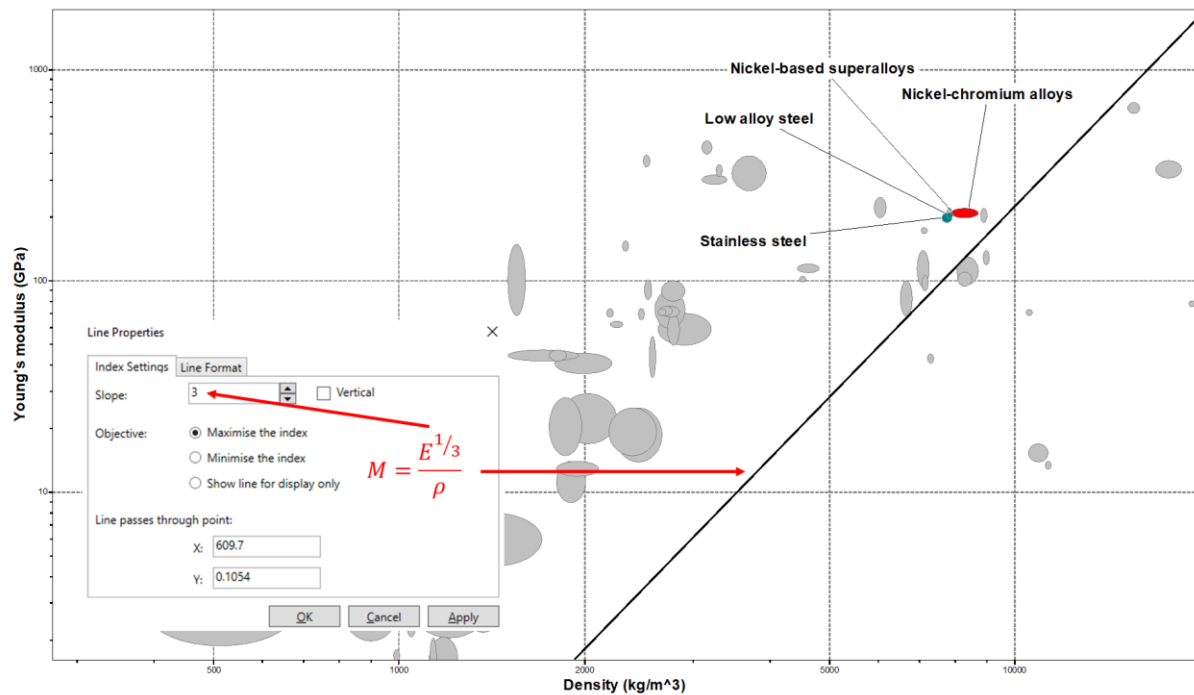
▼ Thermal properties			
	Minimum	Maximum	
Melting point			°C
Glass temperature			°C
Maximum service temperature	500		°C
Minimum service temperature			°C

Slika 1.16 Unos limitirajućih ograničenja lomne žilavosti i maksimalne radne temperature u programu Granta Edupack

Na slici 1.17 vidi se generirani dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log p$. U dijagramu je ucrтана smjernica nagiba „2“ i translahirana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Poredak materijala od boljih prema lošijima, za laku gredu s aktivnim ograničenjem čvrstoće materijala, je: niskolegirani čelici, nehrđajući čelici, superlegure na bazi nikla te Cr-Ni legure.

Na slici 1.18 prikazan je dijagram svojstava materijala $\log E - \log p$. U dijagramu je ucrтана smjernica nagiba „2“ i translahirana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Poredak materijala od boljih prema lošijima, za laku gredu s aktivnim ograničenjem krutosti materijala, je: niskolegirani čelici, nehrđajući čelici, superlegure na bazi nikla te Cr-Ni legure.

U bazi podataka koja sadrži 100 materijala navedena 4 materijala su ujedno jedini koji su zadovoljili ograničenja lomne žilavosti i maksimalne radne temperature.

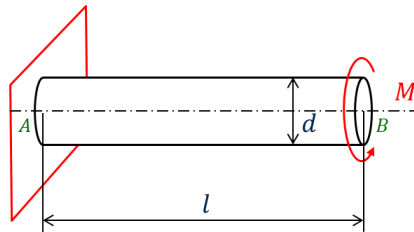
Slika 1.17 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$ Slika 1.18 Dijagram svojstava materijala $\log E - \log \rho$

1.1.5 Zadatak 1.5 – Uvijanje vratila

Odabrati materijal za **jeftino** vratilo kružnog poprečnog presjeka opterećeno momentom M prema slici 1.19 Materijale birati prema kriteriju:

- čvrstoće (zadan faktor sigurnosti S)
- krutosti (maksimalni kut zakreta vratila α_{max})

Materijal mora biti metal rastezljivosti $A \geq 10\%$ te mora imati izvrsnu livljivost.



Slika 1.19 Učvršćeno i opterećeno vratilo konstantnog poprečnog presjeka

Zadane veličine: M, S, α_{max}, l

Slobodne veličine za izbor materijala:

d – promjer vratila

R_p – granica tečenja (plastičnosti) materijala

E – modul elastičnosti materijala

Napomena: $G \approx \frac{3}{8}E$ $I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$ $W_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$

Rješenje

a) Uvjet ravnoteže – određivanje reakcija u uklještenju

$$\Sigma M_x = 0: \quad M_A = M$$

b) Određivanje indeksa materijala lake grede uz ograničenje čvrstoće

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_p} \leq \tau_{dop} \approx \frac{R_p}{2 \cdot S} \quad (1)$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot r^3}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (2)$$

$$\frac{M}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \leq \frac{R_p}{2 \cdot S}$$

$$d \geq \left(\frac{32 \cdot M \cdot S}{\pi \cdot R_p} \right)^{1/3} \quad (3)$$

Masa vratila je:

$$m = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot l \cdot \rho \quad (4)$$

Uvrštavanjem izraza za promjer (3) u (4) – eliminacija slobodne varijable:

$$m_1 \geq \left(4 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot M \cdot S \right)^{2/3} \cdot l \cdot \frac{\rho}{R_p^{2/3}}$$

Odavde slijedi da je indeks materijala za lako vratilo uz aktivno ograničenje čvrstoće materijala:

$$M_1 = \frac{R_p^{2/3}}{\rho}$$

c) Određivanje indeksa materijala lake grede uz ograničenje krutosti

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_p}$$

$$\alpha = \vartheta \cdot l = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \leq \alpha_{dop} \quad (1)$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (2)$$

Uvrštavanjem (1) u (2) slijedi:

$$\frac{M_t \cdot l}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} \leq \alpha_{dop} \Rightarrow d^4 \geq \left(\frac{32 \cdot M_t \cdot l}{G \cdot \pi \cdot \alpha_{dop}} \right)^{1/2}$$

Primjena ograničenja na funkciju cilja tj. izraz za minimalizaciju mase vratila:

$$m = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot l \cdot \rho \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza za promjer (3) u (4) – eliminacija slobodne varijable:

$$m_2 \geq \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{8 \cdot 32 \cdot M_t \cdot l}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot \alpha_{dop}} \right)^{1/2} \cdot l \cdot \rho$$

$$m_2 \geq \left(\frac{16 \cdot \pi \cdot M_t}{3 \cdot \alpha_{dop}} \right)^{1/2} \cdot l^{3/2} \cdot \frac{\rho}{E^{1/2}}$$

Odavde slijedi da je indeks materijala za lako vratio uz aktivno ograničenje čvrstoće materijala:

$$M_2 = \frac{E^{1/2}}{\rho}$$

Primjena limitirajućih ograničenja lomne žilavosti $K_{1c} \geq 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ i maksimalne radne temperature 500°C implementirana su u program za izbor materijala (slika 1.20).

The screenshot shows a software interface for material selection. It features a sidebar with expandable sections: Mechanical properties (expanded), Thermal properties, Electrical properties, Optical properties, Critical Materials Risk, and Processability. The 'Mechanical properties' section contains a table with columns for property names, minimum values, maximum values, and units. Properties listed include Young's modulus, Shear modulus, Bulk modulus, Poisson's ratio, Yield strength (elastic limit), Tensile strength, Compressive strength, Elongation, Hardness - Vickers, Fatigue strength at 10^7 cycles, Fracture toughness, and Mechanical loss coefficient (tan delta). The 'Processability' section includes Castability and Moldability. Some fields are pre-filled with values like 10 for Elongation and 5 for Castability.

	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation	10		% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10^7 cycles			MPa
Fracture toughness			$\text{MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

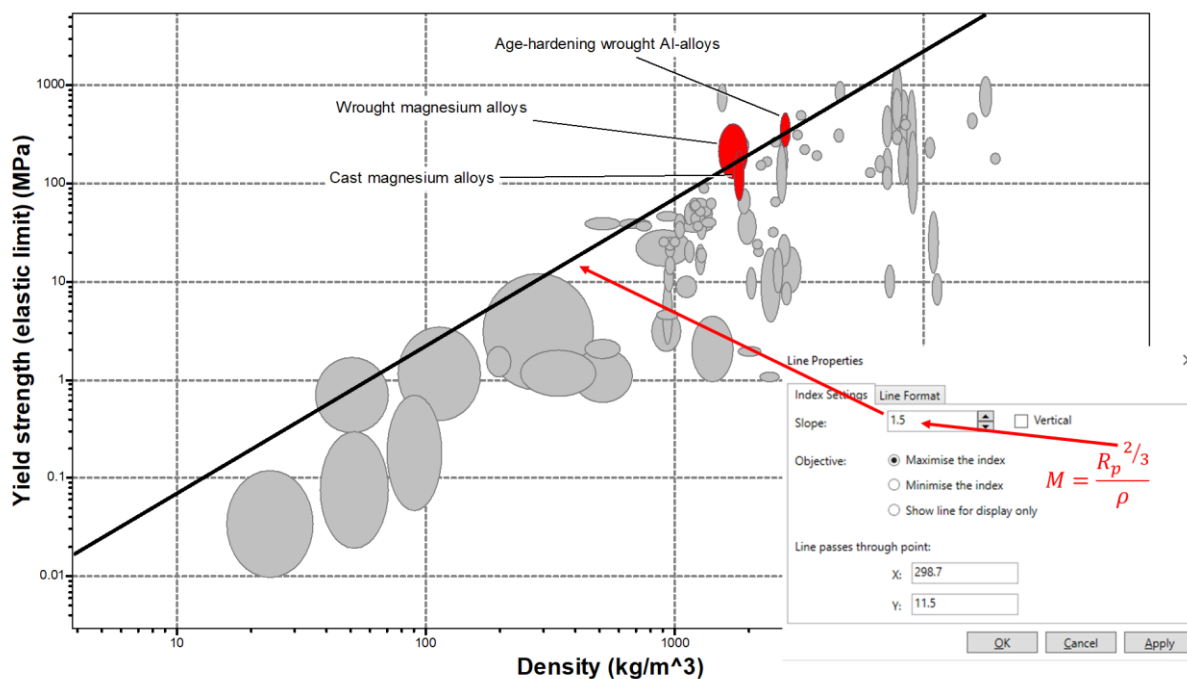
	Minimum	Maximum
Castability	5	
Moldability		

Slika 1.20 Primjena limitirajućih ograničenja

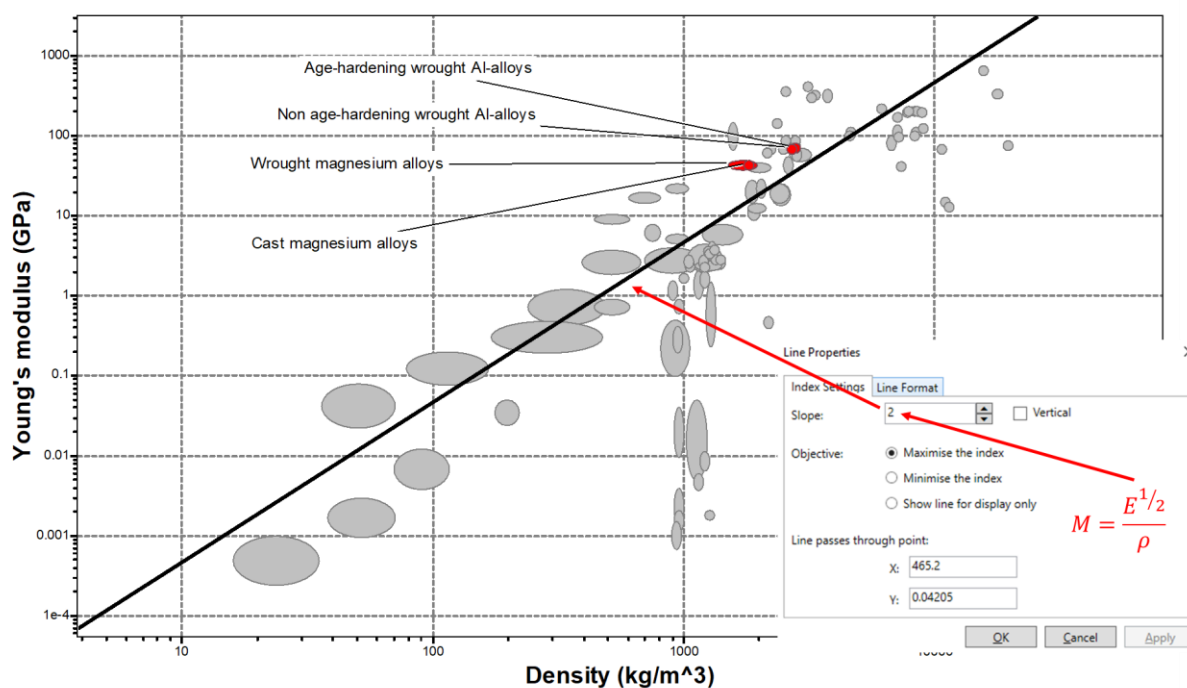
Na slici 1.21 vidi se generirani dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$. Sivo osjenčeni kružići i elipse predstavljaju materijale koji ne zadovoljavaju jedno ili oba limitirajuća ograničenja rastezljivosti i livljivosti. U dijagramu je ucrtana smjernica nagiba „3/2“ i translirana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Najviše rangirani materijali, za lako vratio s aktivnim ograničenjem čvrstoće materijala, su: dozrijevanjem očvrstive legure aluminija, gnječilačke legure magnezija i lijevačke legure magnezija.

Na slici 1.22 prikazan je dijagram svojstava materijala $\log E - \log \rho$. U dijagramu je ucrtana smjernica nagiba „2“ i translirana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Najviše rangirani materijali, za lako vratio s aktivnim ograničenjem krutosti materijala, su: dozrijevanjem očvrstive i neočvrstive legure aluminija te gnječilačke i lijevačke legure magnezija.

Korištena je baza podataka koja sadrži 100 materijala. Može se uočiti da su isti materijali najviše rangirani s aspekta oba aktivna ograničenja.



Slika 1.21 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$



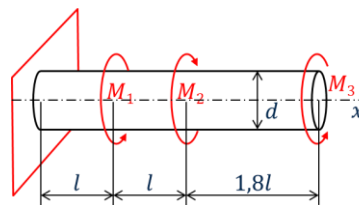
Slika 1.22 Dijagram svojstava materijala $\log E - \log \rho$

1.1.6 Zadatak 1.6 – Uvijanje vratila

Za štap kružnog poprečnog presjeka zadan i opterećen prema slici 1.23:

- skicirati i kotirati dijagram momenata uvijanja M_t ,
- skicirati i kotirati dijagram smičnog naprezanja τ ,
- skicirati i kotirati dijagram relativnog kuta uvijanja ϑ ,
- skicirati i kotirati dijagram kuta zakreta α .
- odrediti koji su materijali najbolji za izradu **laganog čvrstog** vratila ako je faktor sigurnosti S .

Materijal mora ispuniti i sljedeća ograničenja: $A \geq 10\%$, materijal mora imati mogućnost recikliranja.



Slika 1.23 Učvršćeno i opterećeno vratilo konstantnog poprečnog presjeka

Zadane veličine: $M_1 = M$

$$M_2 = 2,5 \cdot M$$

$$M_3 = 1,2 \cdot M$$

$$l$$

Slobodne veličine za izbor materijala:

G – modul smicanja

d – promjer vratila

Napomena: $G \approx \frac{3}{8} E \quad I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} \quad W_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$

Rješenje

a) Uvjet ravnoteže – određivanje reakcija u uklještenju

$$\Sigma M_x = 0: \quad M_A + M_1 - M_2 + M_3 = 0$$

$$M_A = 0,3 \cdot M$$

b) Smična naprezanja

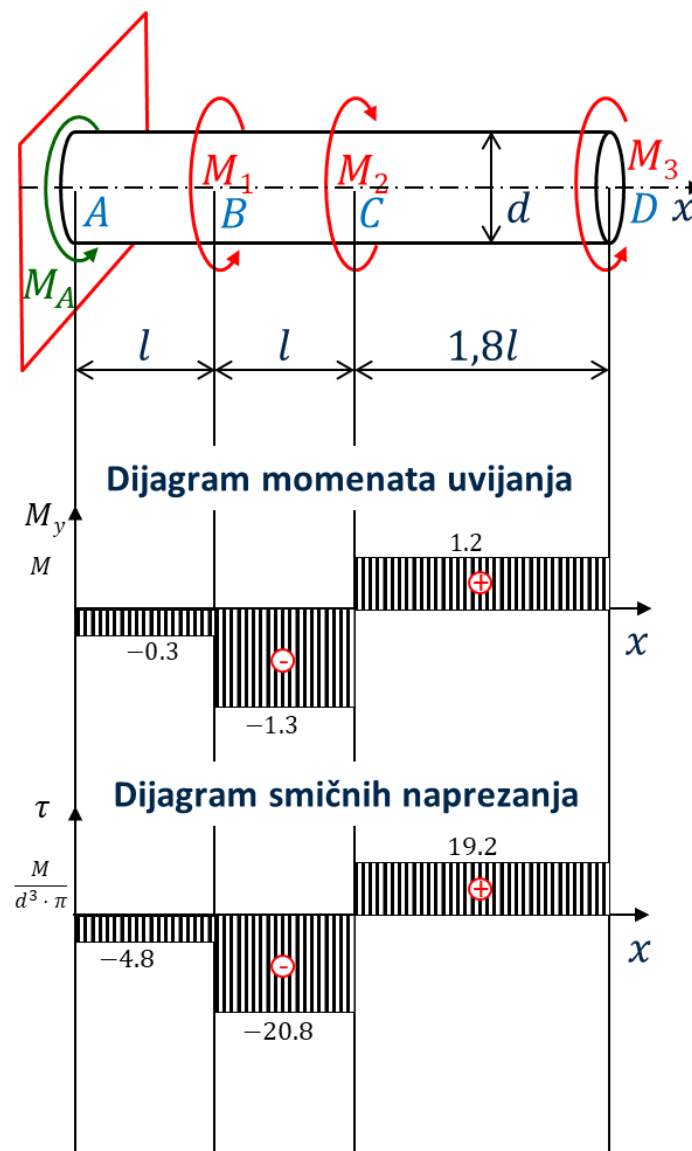
$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{I_p} \cdot \frac{d}{2}$$

$$0 \leq x \leq l \quad \tau_{AB} = \frac{-0.3M}{\frac{d^4 \cdot \pi}{32}} \cdot \frac{d}{2} = -4.8 \frac{M}{d^3 \cdot \pi}$$

$$l \leq x \leq 2l \quad \tau_{BC} = \frac{-1.3M}{\frac{d^4 \cdot \pi}{32}} \cdot \frac{d}{2} = -20.8 \frac{M}{d^3 \cdot \pi}$$

$$2l \leq x \leq 3.8l \quad \tau_{CD} = \frac{1.2M}{\frac{d^4 \cdot \pi}{32}} \cdot \frac{d}{2} = 19.2 \frac{M}{d^3 \cdot \pi}$$

Na slici 1.24 prikazani su dijagrami momenata uvijanja i smičnih naprezanja.



Slika 1.24 Dijagram momenata i smičnih naprezanja

c) Relativni kut uvijanja

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_p}$$

$$0 \leq x \leq l \quad \vartheta_{AB} = \frac{-0.3 \cdot M}{G \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{32}} = \frac{-9.6 \cdot M}{G \cdot d^4 \cdot \pi}$$

$$l \leq x \leq 2l \quad \vartheta_{BC} = \frac{-1.3 \cdot M}{G \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{32}} = \frac{-41.6 \cdot M}{G \cdot d^4 \cdot \pi}$$

$$2l \leq x \leq 3.8l \quad \vartheta_{CD} = \frac{1.2 \cdot M}{G \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{32}} = \frac{38.4 \cdot M}{G \cdot d^4 \cdot \pi}$$

d) Kut uvijanja presjeka

$$\alpha = \vartheta \cdot l$$

$$\alpha_B = \vartheta_{AB} \cdot l = \frac{-9.6 \cdot M \cdot l}{G \cdot d^4 \cdot \pi}$$

$$\alpha_C = \alpha_B + \vartheta_{BC} \cdot l = \frac{-9.6 \cdot M \cdot l}{G \cdot d^4 \cdot \pi} + \frac{-41.6 \cdot M \cdot l}{G \cdot d^4 \cdot \pi} = \frac{-51.2 \cdot M \cdot l}{G \cdot d^4 \cdot \pi}$$

$$\alpha_D = \alpha_C + \vartheta_{CD} \cdot 1.8 \cdot l = \frac{-51.2 \cdot M \cdot l}{G \cdot d^4 \cdot \pi} + \frac{38.4 \cdot M \cdot 1.8 \cdot l}{G \cdot d^4 \cdot \pi} = \frac{17.9 \cdot M \cdot l}{G \cdot d^4 \cdot \pi}$$

Na slici 1.25 prikazani su dijagrami relativnih kutova uvijanja i kutova uvijanja presjeka.

e) Određivanje indeksa materijala čvrstog lakog vratila

Uvjet čvrstoće:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{I_p} \cdot \frac{d}{2} \leq \tau_{dop} \approx \frac{R_p}{2 \cdot S}$$

$$\frac{1.3M}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \leq \frac{R_p}{2 \cdot S} \quad \Rightarrow \quad d \geq \left(\frac{41.6 \cdot M \cdot S}{\pi \cdot R_p} \right)^{1/3} \quad (1)$$

Masa vratila:

$$m = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot 3.8 \cdot l \cdot \rho = 0.95 \cdot d^2 \cdot \pi \cdot l \cdot \rho \quad (2)$$

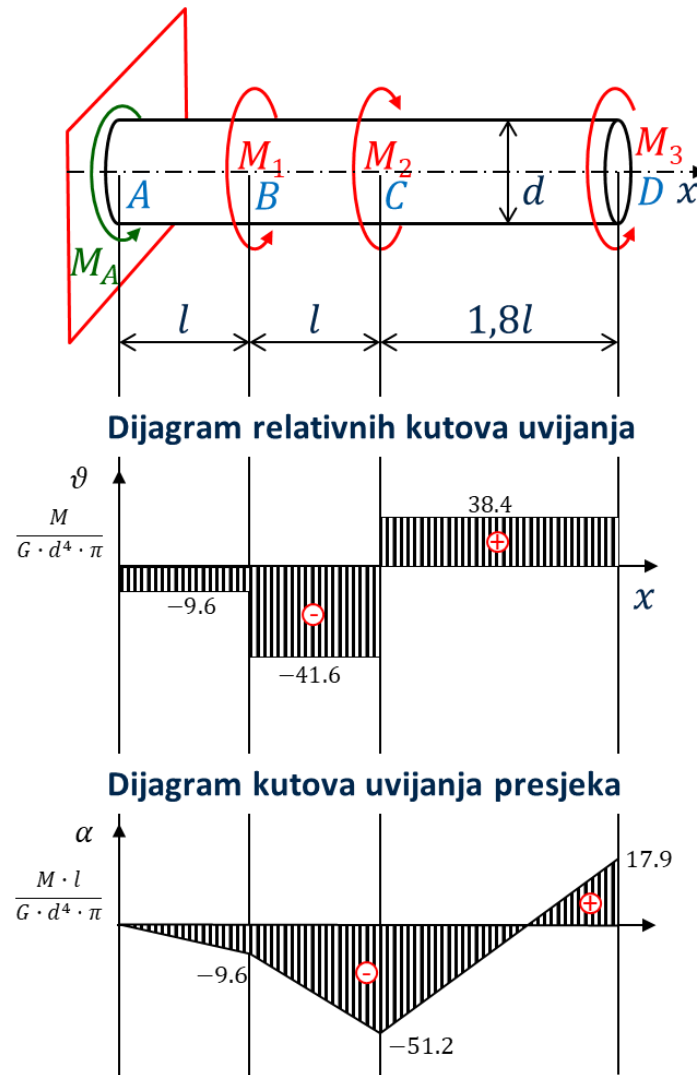
Eliminacijom promjera kao slobodne varijable u izrazu (2) i uvrštavanjem izraza (1) slijedi:

$$m \geq 0.95 \cdot \left(\frac{41.6 \cdot M \cdot S}{\pi \cdot R_p} \right)^{2/3} \cdot \pi \cdot l \cdot \rho$$

$$m \geq \left(38.52 \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot M \cdot S \right)^{\frac{2}{3}} \cdot l \cdot \frac{\rho}{R_p^{\frac{2}{3}}}$$

Oдавдје слиједи да је индекс материјала за лако вратило уз активно ограничење чврстоће материјала:

$$M = \frac{R_p^{\frac{2}{3}}}{\rho}$$



Slika 1.25 Dijagrami relativnog kuta uvijanja i kuta uvijanja presjeka

Primjena limitirajućih ograničenja rastezljivosti $A \geq 10 \%$ i mogućnosti recikliranja materijala implementirana su u program za izbor materijala (slika 1.26).

Mechanical properties

	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation	10		% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10^7 cycles			MPa
Fracture toughness			MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Material processing: energy

Material processing: CO2 footprint

Material recycling: energy, CO2 and recycle fraction

Recycle ☒

Embodied energy, recycling MJ/kg

CO2 footprint, recycling kg/kg

Recycle fraction in current supply %

Downcycle ☐

Combust for energy recovery ☐

Heat of combustion (net) MJ/kg

Combustion CO2 kg/kg

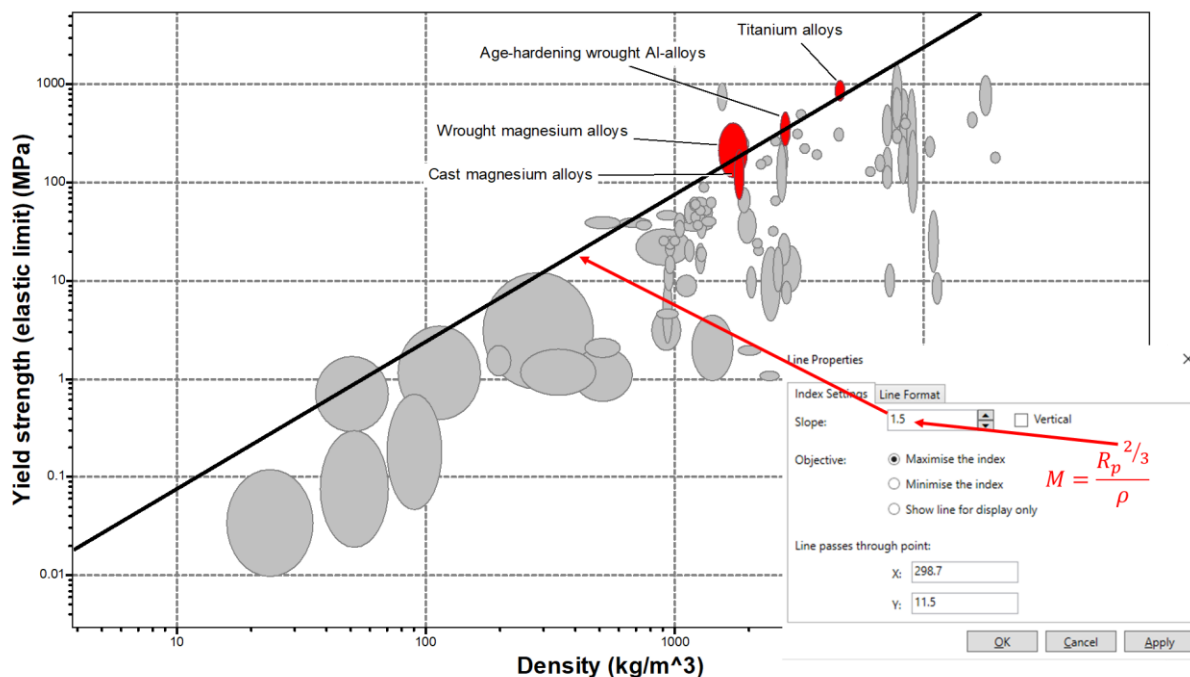
Landfill ☐

Biodegrade ☐

Toxicity rating

Slika 1.26 Limitirajuće ograničenje rastezljivosti i jednostavno ograničenje sposobnosti recikliranja

Na slici 1.27 prikazan je generirani dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$. Sivo osjenčeni kružići i elipse predstavljaju materijale koji ne zadovoljavaju jedno ili oba limitirajuća ograničenja rastezljivosti i livljivosti. U dijagramu je ucrtana smjernica nagiba „3/2“ i translatairana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Najviše rangirani materijali, za lako vratilo s aktivnim ograničenjem čvrstoće materijala, su: legure titana, dozrijevanjem očvrstive legure aluminija, gnječilačke legure magnezija i lijevačke legure magnezija.



Slika 1.27 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$

1.1.7 Zadatak 1.7 – Elastično izvijanje (po Euleru)

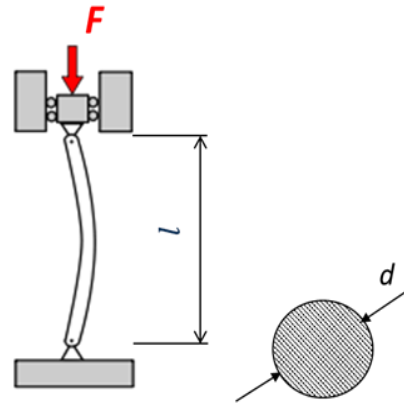
Štap kružnog poprečnog presjeka duljine $l = 2$ m zglobno je vezan na oba kraja i opterećen silom $F = 50$ kN prema slici 1.28.

a) Izvršiti izbor materijala za **lagani metalni tlačno opterećeni štap** (elastično izvijanje prema Euleru). Štap je punog okruglog presjeka, a konstrukcijski slobodna varijabla je promjer štapa d .

b) Na temelju odabranog materijala dimenzionirati štap ako je faktor sigurnosti $S_i = 3,5$ (odrediti promjer štapa d). Pri dimenzioniranju pretpostaviti da je $\sigma_0 = 1,4 \cdot R_p$, a $R_{pr} = 0,8 \cdot R_p$

c) Provjeriti dali do izvijanja dolazi u elastičnom području uz zadani faktor sigurnosti ($S_i = 3,5$).

d) Odrediti masu štapa!



Slika 1.28 Opterećeni štap

Dodatna ograničenja pri izboru $A > 5\%$, $E_{min} > 50$ GPa i $K_{1c} > 50$ MPa $\cdot$ m $^{\frac{1}{2}}$

Slobodna varijabla za izbor: d - promjer štapa

Rješenje

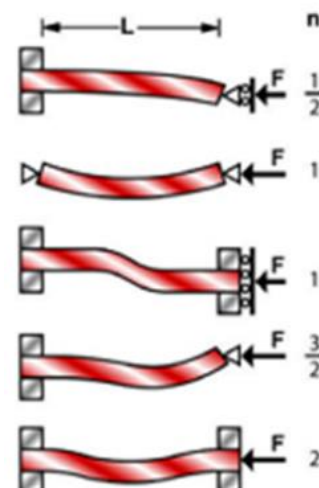
a) Određivanje indeksa materijala lakog stabilnog štapa

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_0^2} = \frac{n^2 \pi^2 EI_{min}}{l^2} \geq F \cdot S_i \quad I_{min} = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$$

$$l_0 = \frac{l}{n}$$

$$d^2 \geq \left(\frac{64 \cdot l^2 \cdot F \cdot S_i}{n^2 \cdot \pi^3 \cdot E} \right)^{1/2} \quad (1)$$

$$n = 1$$



Masa štapa:

$$m = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot l \cdot \rho \quad (2)$$

Eliminacijom slobodne varijable uvrštavanjem izraza (1) u izraz (2):

$$m \geq \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{64 \cdot l^2 \cdot F \cdot S_i}{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot \pi} \right)^{1/2} \cdot l \cdot \rho \quad (3)$$

Sređivanjem izraza (3) slijedi funkcija cilja minimalne mase:

$$m \geq \left(\frac{4 \cdot F \cdot S_i}{n^2 \cdot \pi} \right)^{1/2} \cdot l^2 \cdot \frac{\rho}{E^{1/2}}$$

Oдавдје slijedi да је индекс материјала за лагани штап уз активно ограничење еластичне стабилности:

$$M = \frac{E^{1/2}}{\rho}$$

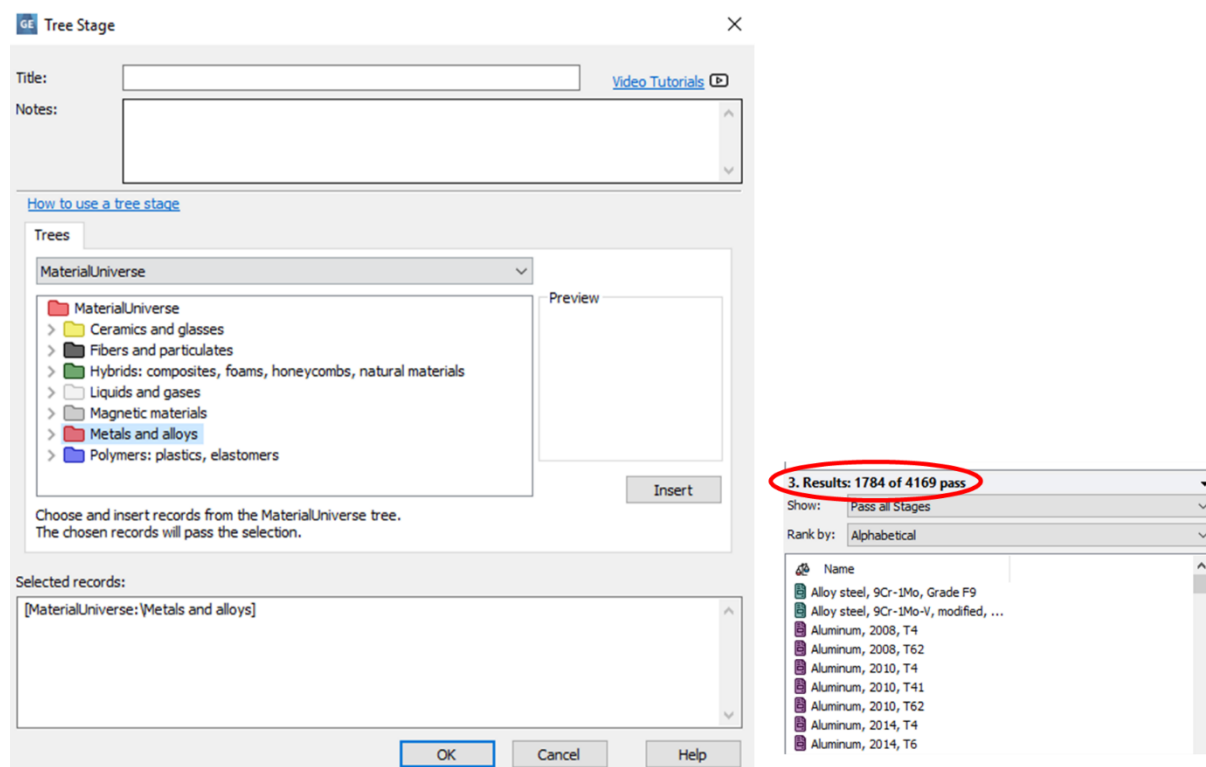
U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log E = 2 \cdot \log \rho + \log M$$

gdje je „2“ nagib smjernice „pravca“ za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log E - \log \rho$.

Izbor materijala započinje redukcijom baze podataka na metale i legure (slika 1.29) što je jedan od zahtjeva u ovom zadatku.

Nakon redukcije baze unose se limitirajuća ograničenja Youngovog modula elastičnosti $E_{min} > 50 \text{ GPa}$, rastezljivosti $A > 5\%$ i lomne žilavosti materijala $K_{1c} > 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$ prema slici 1.30.

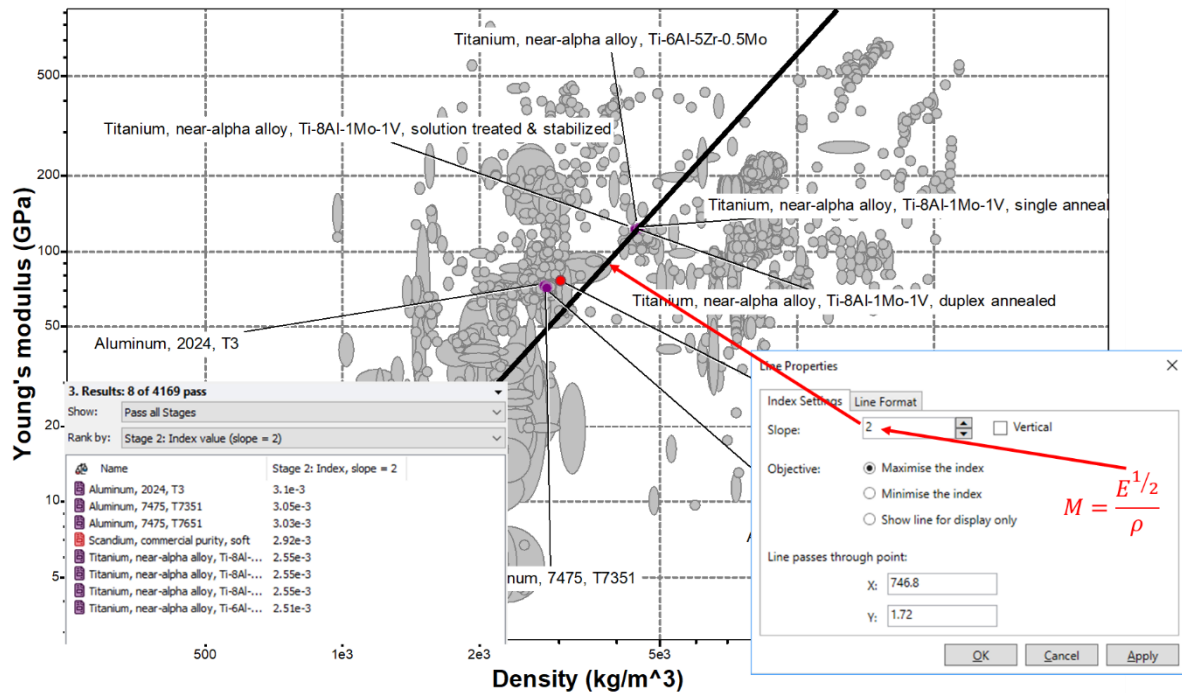


Slika 1.29 Ograničavanje izbora materijala na metale i legure

▼ Mechanical properties			
	Minimum	Maximum	
Young's modulus	50		GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation	5		% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10 ⁷ cycles			MPa
Fracture toughness	50		MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Slika 1.30 Unos limitirajućih ograničenja

Na slici 1.31. prikazan je generirani dijagram svojstava materijala $\log E - \log \rho$. Sivo osjenčeni kružići i elipse predstavljaju materijale koji ne zadovoljavaju jedno ili više limitirajućih ograničenja. U dijagramu je ucrtana smjernica nagiba „2“ i translahirana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Najviše rangirani materijali navedeni su tablično u donjem lijevom kutu slike 1.31. Najviše rangirani materijal je *Aluminum, 2024, T3* te je i izbor u ovom zadatku.

Slika 1.31 Dijagram svojstava materijala $\log E - \log \rho$ **b) Dimenzioniranje štap**

$$d \geq \left(\frac{64 \cdot l^2 \cdot F \cdot S_i}{n^2 \cdot \pi^3 \cdot E} \right)^{1/4} = \left(\frac{64 \cdot 2^2 \cdot 50000 \cdot 3.5}{1^2 \cdot \pi^3 \cdot 74 \cdot 10^9} \right)^{1/4} = 0,0665 \text{ m} = 66,5 \text{ mm}$$

Usvaja se standardna veličina promjera **$d = 70 \text{ mm}$** .

c) Provjera vitkosti

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{min}} \quad \text{gdje je} \quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad \text{i} \quad l_0 = \frac{l}{n}$$

Značenje oznaka:

i_{min} - minimalni radijus inercije

I_{min} - minimalni aksijalni moment inercije

R_{pr} - granica proporcionalnosti

$$\lambda = \frac{l}{n \cdot \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{4 \cdot l}{n \cdot d} = \frac{4 \cdot 2000}{1 \cdot 70} = 114.3$$

$$\lambda_p = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{R_{pr}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{74000}{0.8 \cdot 331}} = 52.5$$

$$\lambda > \lambda_p \Rightarrow \text{elastično izvijanje}$$

d) Masa štapa

$$m \geq \left(\frac{4 \cdot F \cdot S_i}{n^2 \cdot \pi} \right)^{1/2} \cdot l^2 \cdot \frac{\rho}{E^{1/2}}$$

Za odabrani materijal *Aluminum, 2024, T3* važna svojstva u ovom zadatku su:

$$E = 74 \text{ GPa}$$

$$K_{1c} = 66 \text{ MPa} \cdot \frac{\text{m}^{1/2}}{2}$$

$$\rho = 2765 \text{ kg/m}^3$$

$$A = 12 \%$$

$$R_p = 331 \text{ MPa}$$

Uvrštavanjem gore navedenih podataka dobiva se masa štapa:

$$m \geq \left(\frac{4 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 3.5}{1^2 \cdot \pi} \right)^{1/2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2765}{(74 \cdot 10^9)^{1/2}}$$

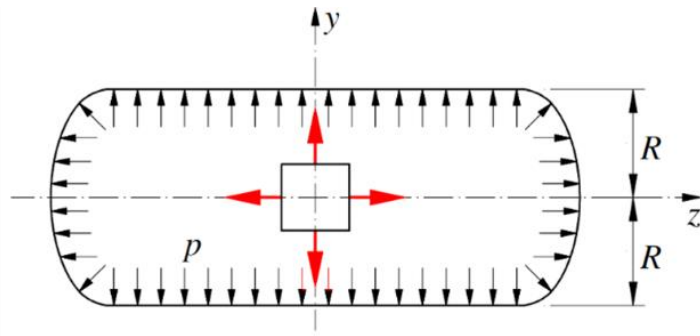
$$m \geq 19.2 \text{ kg}$$

1.1.8 Zadatak 1.8 – Višeosno naprezanje

Metalni spremnik radijusa $r = 500 \text{ mm}$ i debljine stjenke t (slika 1.32) podvrgnut je unutarnjem tlaku $p = 10 \text{ bar}$. Pritisak generira aksijalno naprezanje i naprezanje po obodu cijevi.

- Koja je najbolja kombinacija svojstava materijala cilindričnog plašta ako je cilj minimalna masa, a koja ako je cilj minimalna cijena (slobodna varijabla je debljina stjenke plašta t)?
- Dimenzionirati cilindrični dio plašta spremnika za odabrani materijal ($t = ?$) ako je faktor sigurnosti $S=3$.

Materijal plašta spremnika mora ispuniti i slijedeća ograničenja: rastezljivost $A > 5 \%$, modul elastičnosti $E > 65 \text{ GPa}$ i $K_{1c} > 40 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$.



Slika 1.32 Metalni spremnik podvrgnut unutarnjim tlakom

Zadane veličine: $r = 500 \text{ mm}$

$p = 10 \text{ bar}$

$S = 3$

Slobodne veličine za izbor materijala:

t – debljina stijenke spremnika

Traži se:

- najbolja kombinacija svojstava materijala cilindričnog plašta ako je cilj minimalna masa
- najbolja kombinacija svojstava materijala cilindričnog plašta ako je cilj minimalna cijena
- t – debljina stijenke spremnika

Rješenje

Tangencijalno naprezanje:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{p \cdot r}{t}$$

Aksijalno naprezanje:

$$\sigma_2 = \sigma_z = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t}$$

Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu:

$$\begin{aligned} \sigma_{ekv} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{p \cdot r}{t} - \frac{p \cdot r}{2 \cdot t}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot r}{2 \cdot t}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot r}{t}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p \cdot r}{t} \end{aligned}$$

Dodatna limitirajuća ograničenja rastezljivosti $A > 5 \%$, modula elastičnosti $E > 65 \text{ GPa}$ i lomne žilavosti $K_{Ic} > 40 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ treba implementirati u program za izbor materijala (slika 1.33).

	Minimum	Maximum	
Young's modulus	65		GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation	5		% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10^7 cycles			MPa
Fracture toughness	40		$\text{MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Slika 1.33 Unos limitirajućih ograničenja u program Granta EduPack

a) Određivanje kombinacije svojstava materijala lakog i čvrstog cilindričnog plašta spremnika

$$\sigma_{ekv} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p \cdot r}{t} \leq \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S} \quad (1)$$

Obzirom da je debljina stijenke plašta spremnika t slobodna varijabla za podešavanje čvrstoće prema odabranom materijalu izraz (1) treba prikazati na način da se varijabla t stavi na lijevu stranu izraza, a sve ostale varijable na desni:

$$t \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p \cdot r \cdot S}{R_p}$$

Masa cilindričnog plašta spremnika po jedinici duljine je:

$$m_L = m/L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \cdot \rho$$

Eliminacijom slobodne varijable slijedi:

$$m \geq 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p \cdot r \cdot S}{R_p} \cdot \rho = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot p \cdot S \cdot r^2 \cdot \frac{\rho}{R_p} \Rightarrow M_1 = \frac{R_p}{\rho}$$

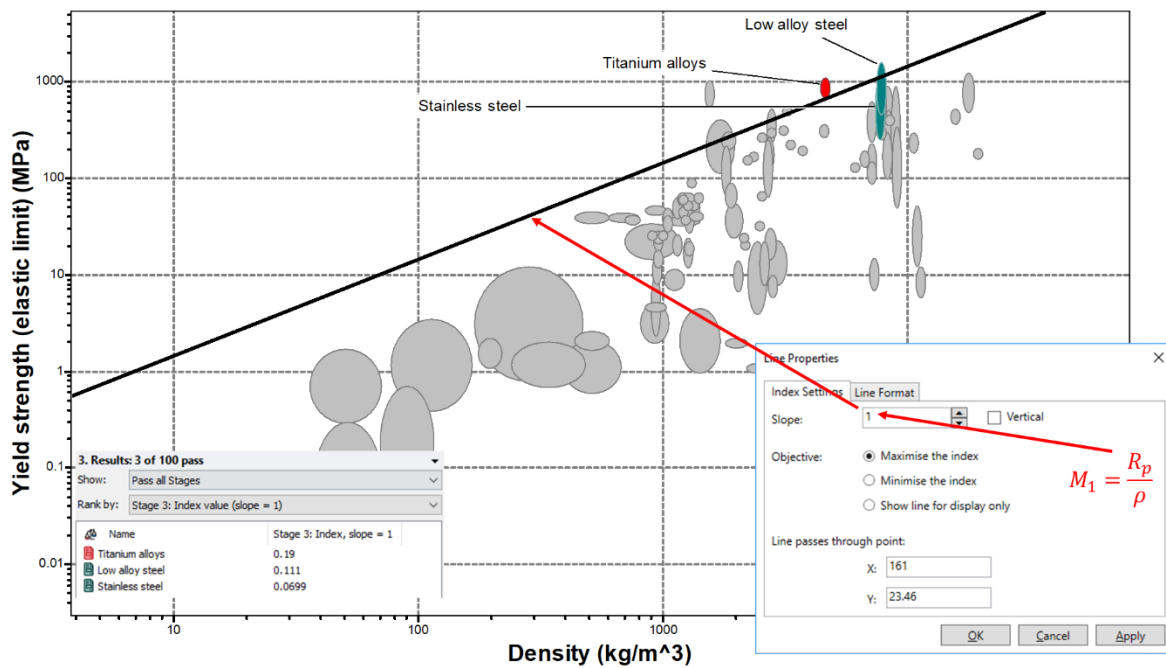
Minimalizacijom kombinacije svojstava $M_1 = \frac{R_p}{\rho}$ minimalizira se masa.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama.

Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log R_p = 1 \cdot \log \rho + \log M_1$$

gdje je „1“ nagib smjernice „pravca“ za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$ (slika 1.34).



Slika 1.34 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$

Najviše rangirani materijal je legura titana „Titanium, alpha-beta alloy, Ti-6Al-2Sn-2Zr-2Mo, solution treated & aged“ čija su ključna svojstva potrebna za daljnje rješenje zadatka:

$$R_p = 1070 \text{ MPa} \quad \rho = 4500 \text{ kg/m}^3 \quad C_m = 2,98 \text{ €/kg}$$

b) Određivanje kombinacije svojstava materijala jeftinog i čvrstog cilindričnog plašta spremnika

Cijena cilindričnog plašta spremnika po jedinici duljine je:

$$C_L = C/L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \cdot \rho \cdot C_m$$

$$C_L \geq \sqrt{3} \cdot \pi \cdot p \cdot S \cdot r^2 \cdot \frac{\rho \cdot C_m}{R_p} \Rightarrow M_2 = \frac{R_p}{\rho \cdot C_m}$$

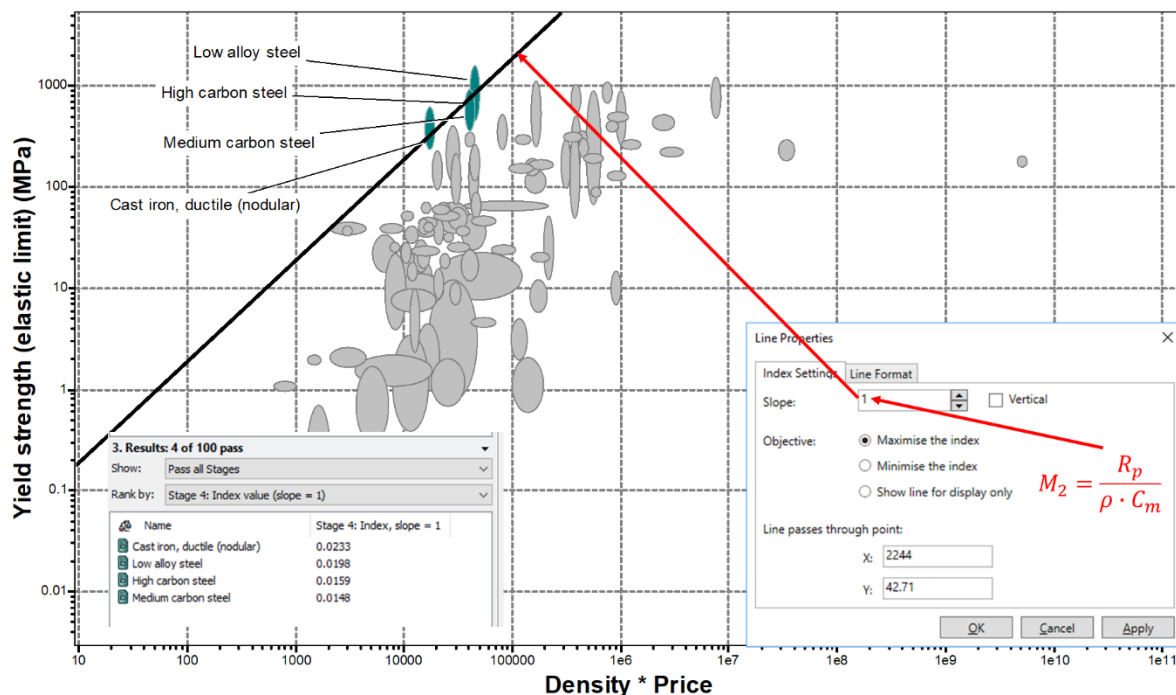
Minimalizacijom kombinacije svojstava $M_2 = \frac{R_p}{\rho \cdot C_m}$ minimalizira se masa.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama.

Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log R_p = 1 \cdot \log(\rho \cdot C_m) + \log M_1$$

gdje je „1“ nagib smjernice „pravca“ za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log R_p - \log(\rho \cdot C_m)$ (slika 1.35).



Slika 1.35 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log(\rho \cdot C_m)$

Najviše rangirani materijal je legura žilavog lijeva „Cast iron, austempered ductile, ADI 1200“ čija su ključna svojstva potrebna za daljnje rješenje zadatka:

$$R_p = 975 \text{ MPa} \quad \rho = 7070 \text{ kg/m}^3 \quad C_m = 0,33 \text{ €/kg}$$

c1) Dimenzioniranje lakog i čvrstog cilindričnog plašta spremnika

Debljina stjenke cilindričnog plašta lakog spremnika:

$$t \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p \cdot r \cdot S}{R_p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 0,5 \cdot 3}{1070} = 0.0012 \text{ m} = 1.2 \text{ mm}$$

Masa cilindričnog plašta lakog spremnika po jedinici duljine:

$$m_L = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot 0,0012 \cdot 4500 = \frac{16.96 \text{ kg}}{\text{m}}$$

Cijena cilindričnog plašta lakog spremnika po jedinici duljine:

$$C_L = C_m \cdot m_L = 158 \cdot 16.96 = \frac{355.87 \text{ €}}{\text{m}}$$

c2) Dimenzioniranje jeftinog i čvrstog cilindričnog plašta spremnika

Debljina stjenke cilindričnog plašta lakog spremnika:

$$t \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p \cdot r \cdot S}{R_p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 0,5 \cdot 3}{975} = 0,00133 \text{ m} = 1.33 \text{ mm}$$

Masa cilindričnog plašta lakog spremnika po jedinici duljine:

$$m_L = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot 0,00133 \cdot 7070 = \frac{29.54 \text{ kg}}{\text{m}}$$

Cijena cilindričnog plašta lakog spremnika po jedinici duljine:

$$C_L = C_m \cdot m_L = 2.45 \cdot 29.54 = \frac{9.61 \text{ €}}{\text{m}}$$

1.2 Zadaci iz područja plastične deformacije materijala

1.2.1 Zadatak 2.1 – Tečenje materijala: Savijanje štapa elastično - idealno plastičnog materijala

a) Odabrati materijal za **laku** gredu (slika 1.36) iz žilavog ($K_{1c} \geq 20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$) i rastezljivog ($A \geq 5 \%$) materijala. Greda je slobodno oslonjena na svojim krajevima i opterećena prema slici kontinuiranim opterećenjem $q = \frac{20 \text{ kN}}{\text{m}}$. Greda mora zadovoljiti **uvjet čvrstoće**. Duljina grede je $l = 2 \text{ m}$. Faktor sigurnosti je $S = 2$.

b) Dimenzionirati gredu ($b = ?$)

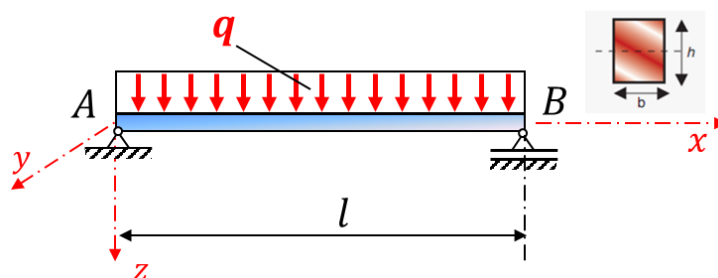
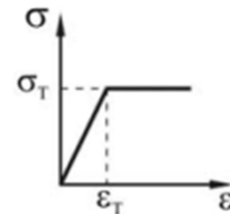
c) Odrediti opterećenje pri kojem će započeti tečenje materijala q_{el}

d) Odrediti opterećenje pri kojem će doći do kolabiranja q_{pl}

(pojava plastičnog zgloba).

Greda ima puni pravokutni poprečni presjek visine $h = 3b$ i širine b .

Napomena: zanemariti vlastitu težinu grede.



Slika 1.36 Skica oslonjene i opterećene grede

Zadane veličine: $h = 3b$

$$S = 2$$

$$q = \frac{20 \text{ kN}}{\text{m}}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

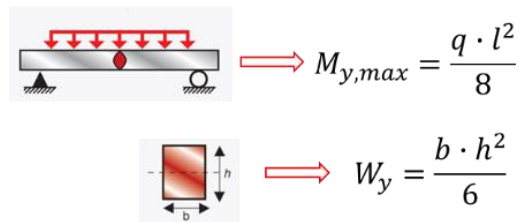
Slobodne veličine za izbor materijala:

b – širina poprečnog presjeka

Rješenje**a) Izbor materijala****Uvjet čvrstoće:**

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} \leq \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S}$$

Podaci preuzeti iz priručnika s gotovim rješenjima:



$$\sigma_{max} = \frac{\frac{q \cdot l^2}{8}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} \leq \frac{R_p}{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{3 \cdot q \cdot l^2}{4 \cdot b \cdot (3 \cdot b)^2} \leq \frac{R_p}{S} \quad (1)$$

$$b \geq \left(\frac{q \cdot l^2 \cdot S}{12 \cdot R_p} \right)^{1/3} \quad (2)$$

Masa grede:

$$m = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = b \cdot 3b \cdot l \cdot \rho = 3 \cdot b^2 \cdot l \cdot \rho \quad (3)$$

Eliminacijom slobodne varijable b iz izraza (3) i uvrštavanjem desne strane izraza (2) slijedi:

$$m \geq 3 \cdot \left(\frac{q \cdot l^2 \cdot S}{12 \cdot R_p} \right)^{2/3} \cdot l \cdot \rho$$

$$m \geq \left(\frac{3^{3/2} \cdot q \cdot l^2 \cdot S}{12} \right)^{2/3} \cdot l^{7/3} \cdot \frac{\rho}{R_p^{2/3}}$$

Oдавдје slijedi да је индекс матерјала за laku чврсту греду:

$$M = \frac{R_p^{2/3}}{\rho}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava $M = \frac{R_p^{2/3}}{\rho}$ minimalizira se masa grede.

U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log R_p = \frac{3}{2} \cdot \log \rho + \log M$$

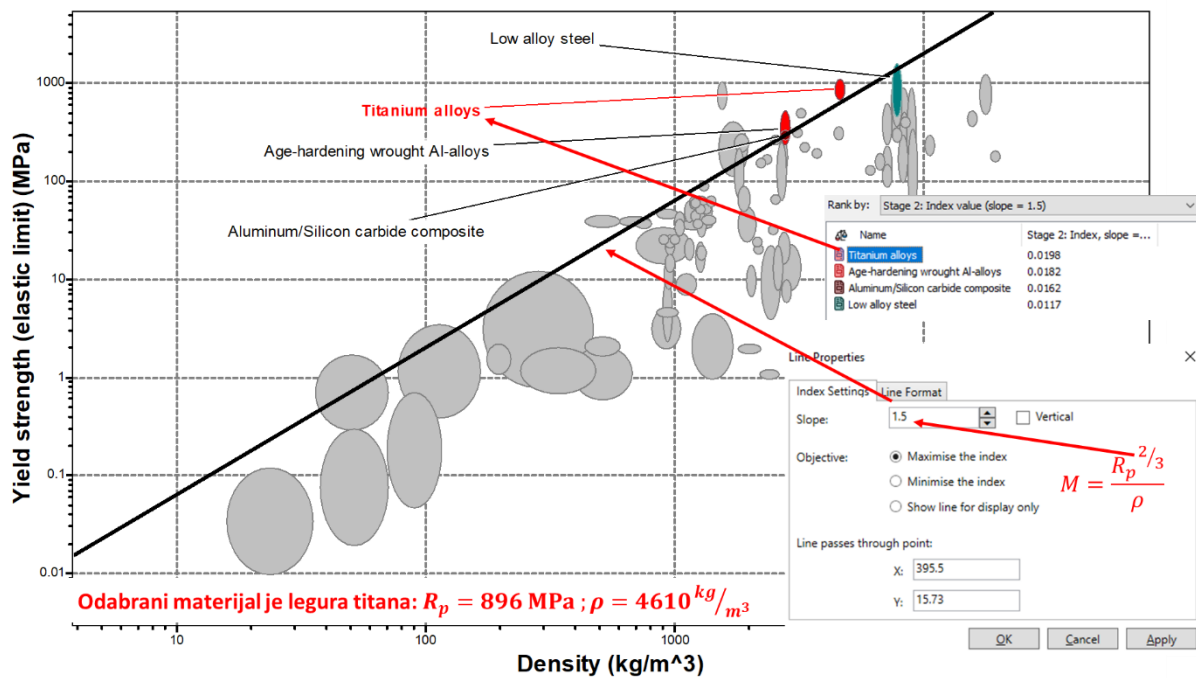
gdje je „ $\frac{3}{2}$ “ nagib smjernice „pravca“ za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$.

Nakon toga slijedi primjena limitirajućih ograničenja lomne žilavosti ($K_{1c} \geq 20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$) i rastezljivosti ($A \geq 5 \%$) prema slici 1.37.

▼ Mechanical properties			
	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation	5		% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10 ⁷ cycles			MPa
Fracture toughness	20		MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Slika 1.37 Unos limitirajućih ograničenja lomne žilavosti i rastezljivosti

Na slici 1.38 prikazan je generirani dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$. Sivo osjenčeni kružići i elipse predstavljaju materijale koji ne zadovoljavaju jedno ili više limitirajućih ograničenja. U dijagramu je ucrтана smjernica nagiba „2“ i translatairana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Najviše rangirani materijali navedeni su tablično u desnom dijelu slika 1.38. Najviše rangirani materijal je *legura titana* te je i izbor u ovom zadatku. Ključna svojstva su $R_p = 896 \text{ MPa}$; $\rho = 4610 \text{ kg/m}^3$

Slika 1.38 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log \rho$

b) Dimenzioniranje

Iz izraza (1) može se odrediti širina profila za odabrani materijal (legura titana):

$$b \geq \left(\frac{q \cdot l^2 \cdot S}{12 \cdot R_p} \right)^{1/3} = \left(\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2^2 \cdot 2}{12 \cdot 896 \cdot 10^6} \right)^{1/3} = 0.0246 \text{ m} = 24.6 \text{ mm} \approx 25 \text{ mm}$$

c) Opterećenje pri kojem dolazi do inicijalnog tečenja materijala

Opterećenje pojave inicijalnog tečenja u vanjskom pojasu grede može se izračunati ako se iz izraza (1) faktoru sigurnosti dodijeli vrijednost jedan ($S = 1$)

$$\frac{M_{y,max}}{W_{y,el}} = R_p \Rightarrow \frac{\frac{q_{el} \cdot l^2}{8}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = R_p \Rightarrow \frac{3 \cdot q_{el} \cdot l^2}{4 \cdot b \cdot h^2} = R_p$$

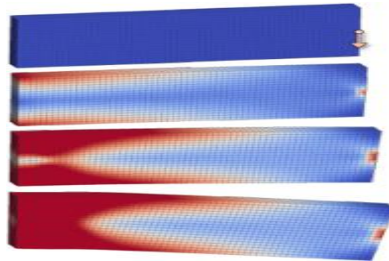
$$q_{el} = \frac{4 \cdot b \cdot h^2 \cdot R_p}{3 \cdot l^2} = \frac{12 \cdot b^3 \cdot R_p}{l^2} = \frac{12 \cdot 0.025^3 \cdot 896 \cdot 10^6}{2^2} = \frac{42000 \text{ N}}{\text{m}} = \frac{42 \text{ kN}}{\text{m}}$$

d) Opterećenje pri kojem dolazi do kolabiranja (pojava plastičnog zgloba – slika 1.39)

Opterećenje pri kojem dolazi do kolabiranja grede dobije se ako se u izrazu (1) uvrsti da je faktor sigurnosti jednak jedan ($S = 1$) i ako se umjesto aksijalnog momenta otpora presjeka za elastično savijanje $W_{y,el}$ uvrsti aksijalnog momenta otpora presjeka za punu plastičnu deformaciju $W_{y,pl}$. Simulacija pojave plastičnog zgloba prikazana je na slici 1.39.

$$\frac{M_{y,max}}{W_{y,pl}} = R_p \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{q_{el} \cdot l^2}{8}}{\frac{b \cdot h^2}{4}} = R_p \quad \Rightarrow \quad \frac{q_{pl} \cdot l^2}{2 \cdot b \cdot h^2} = R_p$$

$$q_{pl} = \frac{2 \cdot b \cdot h^2 \cdot R_p}{l^2} = \frac{18 \cdot b^3 \cdot R_p}{l^2} = \frac{18 \cdot 0.025^3 \cdot 896 \cdot 10^6}{2^2} = \frac{63000 \text{ N}}{\text{m}} = \frac{63 \text{ kN}}{\text{m}}$$

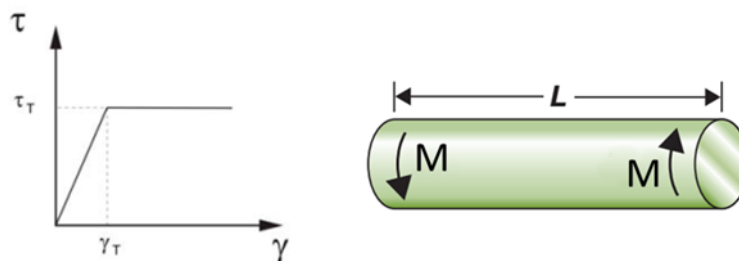


Slika 1.39 Primjer pojave plastičnog zgloba kod konzole

1.2.2 Zadatak 2.2 – Tečenje materijala: Uvijanje štapa od elastično-idealno plastičnog materijala

Vratilo punog okruglog poprečnog presjeka (slika 1.40 - desno) prenosi koncentrirani moment $M = 5 \text{ kNm}$ prema slici. Duljina vratila je $L = 0,4 \text{ m}$. Pretpostaviti da se radi o elastično plastičnom materijalu bez pojave očvršćivanja (dijagram na slika 1.40 - lijevo)

- Odrediti promjer vratila $d = ?$ ako je faktor sigurnosti $S = 1,5$. Materijal vratila je AISI 1050 (DIN Ck50) čelik u toplinski poboljšanom stanju čija je granica tečenja $R_p = 650 \text{ MPa}$. U proračunu pretpostaviti da je smična granica tečenja $\tau_p = 0,58 \cdot R_p$!
- Za proračunate dimenzije presjeka grede odrediti moment $M_{el} = ?$ pri kojem će doći do inicijalne plastične deformacije za proračunati promjer vratila d - vidi a) dio zadatka!
- Za proračunate dimenzije presjeka grede odrediti moment $M_{pl} = ?$ pri kojem će doći do potpune plastične deformacije vratila za proračunati promjer vratila d - vidi a) dio zadatka! Polarni moment otpora za potpunu plastičnu deformaciju vratila punog okruglog presjeka je $W_{p,pl} = \frac{\pi \cdot d^3}{12}$



Slika 1.40 Hookeov dijagram materijala vratila i skica opterećenog vratila

Zadane veličine: $M = 5 \text{ kNm}$

$$L = 0,4 \text{ m}$$

$$S = 1,5$$

$$R_p = 650 \text{ MPa}$$

$$\tau_p = 0,58 \cdot R_p$$

Traži se: d – promjer vratila

M_{el} - moment koji izaziva inicijalnu plastičnu deformaciju

M_{pl} - moment koji izaziva pojavu potpune plastične deformacije

Rješenje

a) Dimenzioniranje vratila $d = ?$

Obzirom da je aktivno ograničenje čvrstoća vratila, maksimalna smična naprezanja moraju biti manja od dopuštenih:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_{p,el}} \leq \tau_{dop} = \frac{0,58 \cdot R_p}{S} \quad (1)$$

Moment otpora za puni kružni presjek u slučaju elastičnih naprezanja je:

$$W_{p,el} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (2)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u (1) slijedi:

$$\frac{M}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \leq \frac{0,58 \cdot R_p}{S}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\left(\frac{16 \cdot M \cdot S}{0,58 \cdot \pi \cdot R_p} \right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{0,58 \cdot \pi \cdot 650 \cdot 10^6} \right)}$$

$$d \geq 0,0466 \text{ m} = 46,6 \text{ mm}$$

Usvaja se prva veća standardna mjera $d = 48 \text{ mm}$.

b) Određivanje momenta pri kojem dolazi do inicijalne plastične deformacije $M_{el} = ?$

Smično naprezanje koje izaziva pojavu inicijalne pukotine na površini vratila je:

$$\tau_{max} = \frac{M_{el}}{W_{p,el}} = 0,58 \cdot R_p \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u (3):

$$\frac{M_{el}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = 0,58 \cdot R_p$$

$$M_{el} = \frac{0,58 \cdot \pi \cdot d^3 \cdot R_p}{16} = \frac{0,58 \cdot \pi \cdot 0,048^3 \cdot 650 \cdot 10^6}{16}$$

$$M_{el} = 8186 \text{ Nm} = 8,186 \text{ kNm}$$

Moment pri kojem dolazi do inicijalne plastične deformacije: **$M_{el} = 8,186 \text{ kNm}$** .

- c) **Određivanje momenta pri kojem dolazi do inicijalne plastične deformacije $M_{el} = ?$
do pune plastične deformacije (plastičnog zgloba) $M_{pl} = ?$**

Razlika u odnosu na prethodni proračun je ta što se u ovom slučaju javlja plastična deformacija po čitavom presjeku pa treba koristiti plastični polarni moment otpora presjeka:

$$W_{p,pl} = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \quad (4)$$

Uvrštavanjem izraza (4) u izraz (3) slijedi:

$$\frac{M_{pl}}{\frac{\pi \cdot d^3}{12}} = 0,58 \cdot R_p$$

$$M_{pl} = \frac{0,58 \cdot \pi \cdot d^3 \cdot R_p}{12} = \frac{0,58 \cdot \pi \cdot 0,048^3 \cdot 650 \cdot 10^6}{12}$$

$$M_{pl} = 10915 \text{ Nm} = 10,915 \text{ kNm}$$

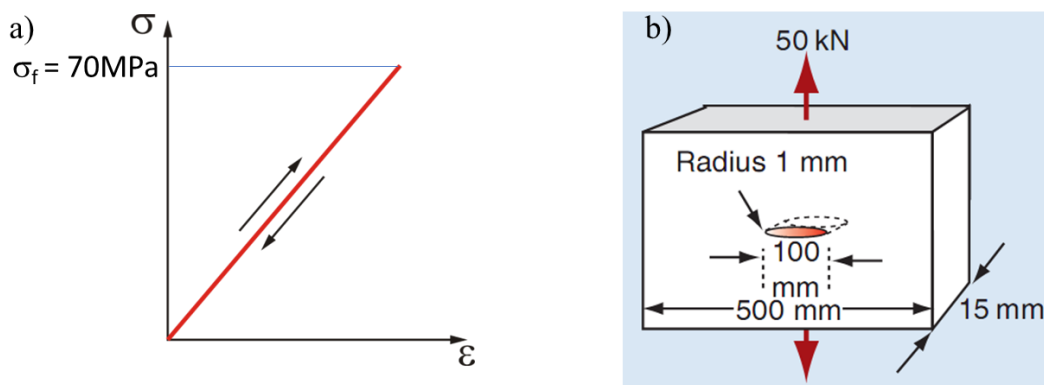
Moment pri kojem dolazi do pune plastične deformacije: **$M_{pl} = 10,915 \text{ kNm}$** .

1.3 Zadaci iz područja koncentracije naprezanja i mehanike loma

1.3.1 Zadatak 3.1 – Koncentracija naprezanja

Ploča pravokutnog poprečnog presjeka $b \times t = 500 \times 15$ mm, prema slici 1.41b, vlačno je opterećena silom 50 kN. Izrađena je iz materijala čiji je Hookeov dijagram prikazan na slici 1.41a. Ploča sadrži eliptičnu rupu duljine $2c = 100$ mm i minimalnog radijusa zaobljenja $d = 1$ mm, orijentiranu prema slici.

- Odrediti nominalno i maksimalno naprezanje ploče! Dali će doći do oštećenja ploče ako je čvrstoća ploče $\sigma_f = 70$ MPa? Hookeov dijagram materijala ploče je prikazan na slici 1.41a
- Ukoliko je debljina ploče t slobodna varijabla za izbor odrediti najbolje materijale za izradu jeftine ploče. Dodatno ograničenje je $K_{1C} \geq 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$



Slika 1.41 a) Hookeov dijagram materijala ploče;
b) opterećena ploča s eliptičnim koncentradorom naprezanja

Rješenje

a) Nominalno naprezanje, maksimalno naprezanje, lom

Nominalno (srednje) naprezanje:

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{b \cdot t} = \frac{50000}{0,5 \cdot 0,015} = 6670000 \text{ Pa} = 6,67 \text{ MPa}$$

Maksimalno naprezanje:

$$\sigma_{max} = \sigma_{nom} \cdot K_{SC}$$

Faktor koncentracije naprezanja:

$$K_{SC} = 1 + \alpha \cdot \left(\frac{c}{\delta}\right)^{1/2} = 1 + 2 \cdot \left(\frac{50}{1}\right)^{1/2} = 15,14$$

Iz priručnika je određen koeficijent α koji za vlačno opterećenje ima iznos 2.

$$\sigma_{max} = 6,67 \cdot 15,14 = \mathbf{101 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{max} > \sigma_f = 70 \text{ MPa}$$

Može se zaključiti da će naprezanje uzrokovati oštećenje ploče (plastičnu deformaciju rastezljivog materijala ili lom krutog materijala)!

b) Izbor najboljih materijala za izradu jeftine ploče

Cijena materijala ploče:

$$C = C_m \cdot m = C_m \cdot b \cdot t \cdot l \cdot \rho \quad (1)$$

$$\frac{F}{b \cdot t} \cdot \left[1 + \alpha \cdot \left(\frac{c}{\delta} \right)^{1/2} \right] \leq \frac{R_p}{S}$$

Obzirom da je debljina stjenke t slobodna varijabla za izbor gornji izraz treba prikazati kako slijedi:

$$t \geq \left[1 + \alpha \cdot \left(\frac{c}{\delta} \right)^{1/2} \right] \cdot \frac{F \cdot S}{b \cdot R_p} \quad (2)$$

Eliminacijom slobodne varijable t iz funkcije cilja (1), tj. uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) slijedi:

$$C/l \geq F \cdot S \cdot \left[1 + \alpha \cdot \left(\frac{c}{\delta} \right)^{1/2} \right] \cdot \frac{C_m \cdot \rho}{R_p}$$

Odakle se može zaključiti da je kombinacija svojstava materijala čijom se maksimalizacijom minimalizira cijena ploče (indeks materijala):

$$M = \frac{R_p}{C_m \cdot \rho}$$

Primjenom programa CES EduPack najprije se unosi zadano limitirajuće ograničenje lomne žilavosti $K_{1c} \geq 50 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ prema slici 1.42.

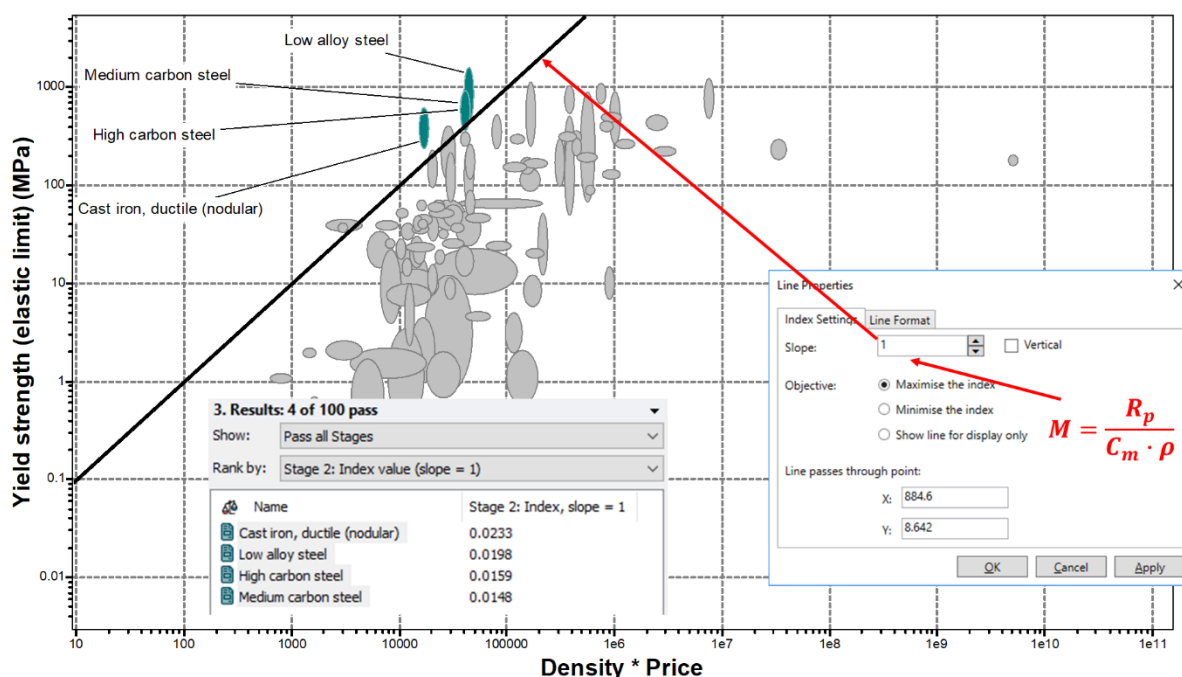
U svrhu izbora materijala primjenom dijagrama potrebno je indeks materijala preurediti kako bi se olakšala primjena dijagrama. Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

$$\log R_p = \mathbf{1} \cdot \log(C_m \cdot \rho) + \log M$$

▼ Mechanical properties			
	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
<u>Tensile strength</u>			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation			% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10^7 cycles			MPa
Fracture toughness	50		MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Slika 1.42 Limitirajuće ograničenje lomne žilavosti materijala

gdje je „1“ nagib smjernice „pravca“ za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log R_p - \log(C_m \cdot \rho)$ koji je prikazan na slici 1.43. U dijagramu je ucrtana smjernica nagiba „1“ i translahirana prema gornjem lijevom kutu tako da izolira nekoliko najviše rangiranih materijala. Poredak materijala od boljih prema lošijima, za laku gredu s aktivnim ograničenjem čvrstoće materijala, je: niskolegirani čelici, srednje i visokouglični čelici te nodularni lijev. Od svi visokorangiranih materijala nodularni lijev ima najveću vrijednost indeksa materijala te predstavlja najbolji izbor za jeftinu ploču.

Slika 1.43 Dijagram svojstava materijala „ $\log R_p - \log(C_m \cdot \rho)$ “

1.3.2 Zadatak 3.2 – Stakleni podni paneli – lomna žilavost

Stakleni podni panel (slika 1.44) ima pukotinu duljine $a = 2 \cdot c = 2 \text{ mm}$ u središtu presjeka.

Lomna žilavost stakla je $K_{1C} = 0,6 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$.

Hodanjem se u panelu razvija naprezanje od $\sigma_0 = 30 \text{ MPa}$.

- a) Dali će doći do loma staklenog panela?
- b) Kolika je kritična duljina pukotine koja može izazvati lom?

Zadane veličine: $2 \cdot c = 2 \text{ mm}$

$$K_{1C} = 0,6 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

$$\sigma = 30 \text{ MPa}$$

Traži se:

Dali će doći do loma?

$$2 \cdot c_{krit} = ?$$



Slika 1.44 Stakleni podni paneli „Skywalk“

Rješenje

- a) Određivanje kritičnog naprezanja koje izaziva lom**
(pukotina u središtu presjeka tj. $a = 2 \cdot c$)

Izraz za lomnu žilavost materijala iz Priručnika:

$$K_{1C} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \quad (1)$$

$$\text{Za pukotinu u središtu panela prema Priručniku } Y = 1 \text{ i } c = \frac{a}{2}. \quad (2)$$

Korištenjem izraza (1) i (2) slijedi da je kritično naprezanje koje izaziva trenutni lom:

$$\sigma_C = \frac{K_{1C}}{\sqrt{\pi \cdot c}} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{\sqrt{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}}} = 10,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 10,7 \text{ MPa}$$

Obzirom da je $\sigma < \sigma_C$ neće doći do loma staklenog poda !

b) Određivanje kritične veličine pukotine u središtu presjeka

$$K_{1C} = Y \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$$

Za $\sigma_C = \sigma_0 = 30 \text{ MPa}$, $K_{1C} = 0,6 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ i $Y = 1$ slijedi:

$$c_{krit} = \frac{K_{1C}^2}{Y \cdot \sigma_f^2 \cdot \pi} = \frac{(0,6 \cdot 10^6)^2}{(30 \cdot 10^6)^2 \cdot \pi} = 0,000127 \text{ m} = 0,127 \text{ mm}$$

Oдавде je kritična duljina pukotine koja izaziva lom pri naprezanju od 30 MPa:

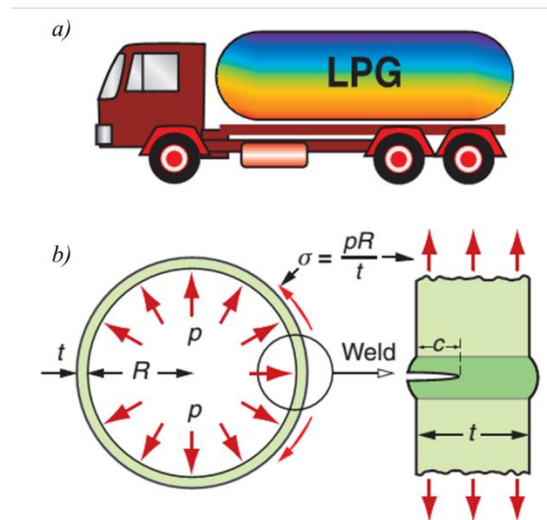
$$a = 2 \cdot c_{krit} = 0,254 \text{ mm}$$

1.3.3 Zadatak 3.3 – Lomna žilavost – Ekspertiza loma tlačne posude za LPG

Kamion s tlačnom posudom za propan (slika 1.45a), napunjen plinom, ostavljen je na suncu parkiran. Nakon kratkog vremena došlo je do eksplozije posude. Posuda je cilindričnog oblika vanjskog promjera $d = 1680$ mm, debljine stijenke $t = 16$ mm i duljine $l = 3710$ mm. Posuda je predviđena za maksimalni tlak od 15 bar. Materijal posude je čelik *EN C30E* ili CK30 (AISI 1030) lomne žilavosti $K_{IC} = 45 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$.

Posuda je opremljena sigurnosnim ventilom limitiranim na $p_{lim} = 15$ bar.

- a) Odrediti ekvivalentno naprezanje σ_{ekv} u cilindričnom dijelu spremnika prema Von Misesu
- b) Odrediti dali je tlak u posudi mogao dovesti do eksplozije ako je naknadnom analizom utvrđeno da je zavar sadržavao površinsku pukotinu dubine 10 mm (utvrđeno prema boji prijeloma – slika 1.45b)?
- c) Odrediti tlak prema kriteriju „**fail-safe design**” (dizajn siguran s aspekta loma). Kriterij podrazumijeva postojanje površinske pukotine $C_{lim} = 2$ mm (ovo je najčešće granična veličina pukotine koja se može otkriti NDT metodama). *Napomena:* Manjkavost ovog kriterija je pretpostavka da u materijalu nema pukotine veće od C_{lim}
- d) Odrediti maksimalno dozvoljenu veličinu pukotine prema kriteriju „**yield before break**” (tečenje materijala prije loma) ako je granica tečenja materijala $R_p = 250$ MPa
- e) Odrediti dozvoljeni tlak u posudi prema kriteriju „**leak before break**” (curenje prije loma) ako je $R_p = 250$ MPa
- f) Odrediti kombinaciju svojstava za izbor materijala
 - f1) najjeftinijeg spremnika uz kriterij naveden u točki 2;
 - f2) najlaganijeg spremnika uz kriterij naveden u točki 2



Slika 1.45 a) Kamion s tlačnom posudom b) Tangencijalno opterećenje unutar cilindričnog dijela spremnika i prikaz pukotine na uzdužnom zavaru

Rješenje

- a) Provjera dali je tlak u posudi mogao dovesti do eksplozije ako je površinska pukotina duljine $c = 10 \text{ mm}$

Tangencijalno naprezanje σ_1 u zavaru cilindričnog dijela spremnika:

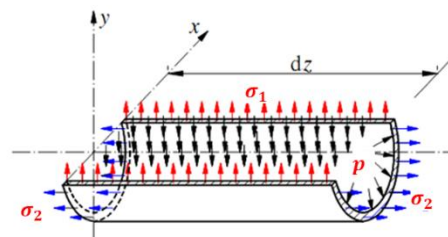
Uvjet ravnoteže:

$$\sum F_y = 0$$

$$2 \cdot r \cdot l \cdot p = 2 \cdot t \cdot l \cdot \sigma_1$$

Slijedi da je tangencijalno naprezanje:

$$\sigma_t = \sigma_1 = \frac{r \cdot p}{t}$$



Aksijalno naprezanje σ_2 u zavaru cilindričnog dijela spremnika:

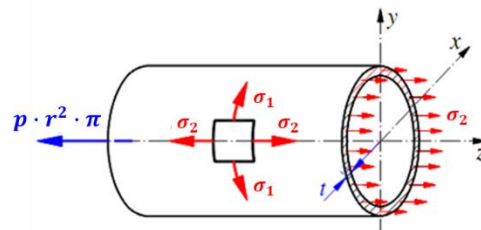
Uvjet ravnoteže:

$$\sum F_z = 0$$

$$r^2 \cdot \pi \cdot p = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot t \cdot \sigma_2$$

Slijedi aksijalno naprezanje:

$$\sigma_z = \sigma_2 = \frac{r \cdot p}{2 \cdot t}$$



Ekvivalentno naprezanje σ_{ekv} :

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r \cdot p}{2 \cdot t}\right)^2 + \left(\frac{r \cdot p}{2 \cdot t}\right)^2 + \left(\frac{r \cdot p}{t}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{r^2 \cdot p^2}{t^2}}$$

$$\sigma_{ekv} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r \cdot p}{t}$$

b) Provjera dali je tlak u posudi mogao dovesti do eksplozije ako je površinska pukotina duljine $c = 10$ mm

$$K_{1c} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$$

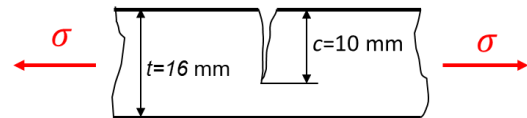
gdje je za površinsku pukotinu $Y = 1.1$ i $a = c$

Ukoliko je kritično naprezanje jednako tangencijalnim naprezanjem slijedi:

$$\sigma_c = \sigma_t = \frac{r \cdot p_{exp}}{t}$$

$$K_{1c} = 1.1 \cdot \sigma_t \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$$

$$K_{1c} = 1.1 \cdot \frac{r \cdot p_{exp}}{t} \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$$



Tlak pri kojem dolazi do eksplozije spremnika je:

$$p_{exp} = \frac{1}{1.1} \cdot \frac{K_{1c} \cdot t}{r \cdot \sqrt{\pi \cdot c}} = \frac{1}{1.1} \cdot \frac{45 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{0.84 \cdot \sqrt{\pi \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = 4,396 \text{ MPa} = \mathbf{43,96 \text{ bar}}$$

Obzirom da je maksimalni tlak u spremniku (ograničen sigurnosnim ventilom) manji od kritičnog tlaka pri kojem dolazi do eksplozije $p_{max} < p_{exp}$ tlak u posudi nije mogao uzrokovati nekontrolirano širenje pukotine postojeće pukotine!

Provjera uvjeta čvrstoće materijala:

$$\sigma_{t,radno} = \frac{r \cdot p_{max}}{t} = \frac{0,84 \cdot 1,5 \cdot 10^6}{0,016} = 78,75 \text{ MPa} < R_p$$

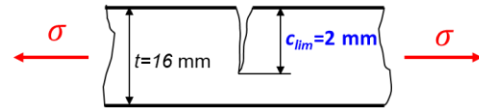
Spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće $\sigma_{t,radno} < R_p$ uz faktor sigurnosti:

$$S = \frac{R_p}{\sigma_{t,radno}} = \frac{250}{78,75} = \mathbf{3,17}$$

c) **Određivanje sigurnog tlaka prema kriteriju „fail-safe design”** (podrazumijeva se postojanje površinske pukotine $C_{lim}=2\text{ mm}$)

$$K_{1C} = Y \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$$

gdje je za površinsku pukotinu $Y = 1.1$ i $a = c$



Pretpostavka je da je pukotina položena okomito na tangencijalno naprezanje koje je ujedno i maksimalne vrijednosti (ne uzima se za proračun vrijednost ekvivalentnog naprezanja) !

$$\sigma_C = \sigma_{max} = \frac{r \cdot p_{krit}}{t}$$

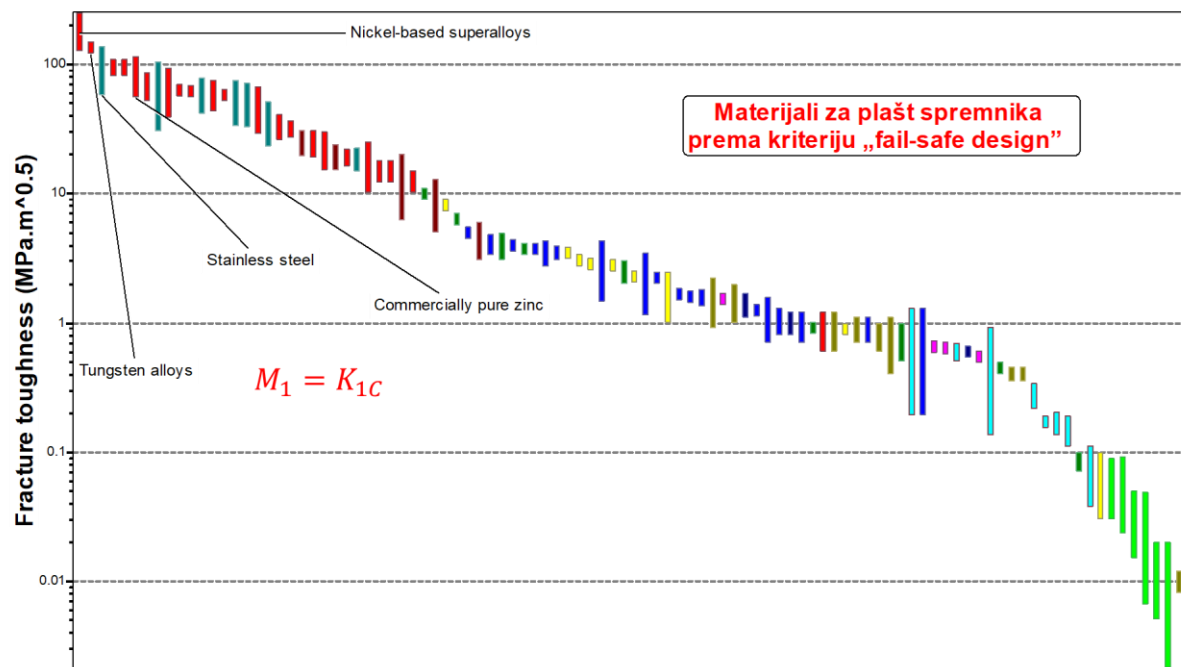
$$K_{1C} = 1.1 \cdot \sigma_{max} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}}$$

$$K_{1C} = 1.1 \cdot \frac{r \cdot p_{krit}}{t} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}}$$

$$p_{krit} = \frac{t \cdot K_{1C}}{1.1 \cdot r \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}}} = \frac{0,016 \cdot 45 \cdot 10^6}{1.1 \cdot 0,84 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,002}} = 8,93 \text{ MPa} = \mathbf{89,3 \text{ bar}}$$

Iz gornjeg izraza slijedi da je indeks za izbor materijala prema kriteriju „fail-safe design” $M_1 = K_{1C}$. Na slici 1.46 prikazan je trakasti dijagram s prikazanim najviše rangiranim materijalima prema kriteriju „fail-safe design”, a to su legure volframa, nehrđajući čelici, superlegure na bazi nikla i komercijalno čisti cink.

Ukoliko u zavaru nema pukotine veće od $C_{lim}=2\text{ mm}$ do nekontroliranog širenje pukotine neće doći pri tlaku manjem od $p_{krit} = 89,3\text{ bar}$!



Slika 1.46 Trakasti dijagram s materijalima rangiranim prema kriteriju „fail-safe design“

d) Određivanje kritične veličine pukotine prema kriteriju „yield before break“ (ako je granica tečenja materijala $R_p = 250$ MPa) $\sigma_{krit} = \sigma_c > R_p$ $c_{krit} = ?$

Usvaja se da kritično naprežanje mora biti veće od granice tečenja materijala:

$$\sigma_{krit} = \sigma_c = R_p$$

$$K_{1C} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$$

$$K_{1C} = 1,1 \cdot R_p \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{krit}} \Rightarrow c_{krit} = \frac{K_{1C}^2}{1,21 \cdot \pi \cdot R_p^2}$$

Iz gornjeg izraza slijedi da je indeks za izbor materijala prema kriteriju „yield before break“

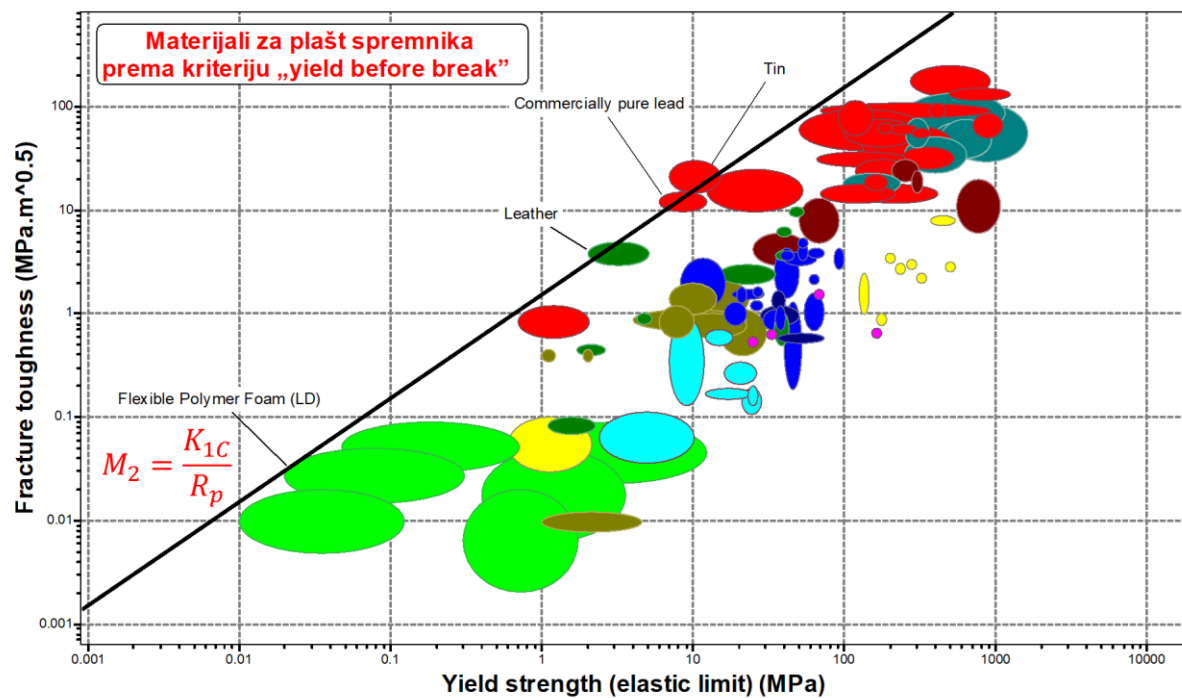
$M_2 = \frac{K_{1C}}{R_p}$. Na slici 1.47 prikazan je dijagram svojstava materijala „ $R_p - K_{1C}$ “ s prikazanim

najviše rangiranim materijalima prema kriteriju „yield before break“, a to su fleksibilne polimerne pjene, koža, komercijalno čisto olovo i kositar.

$$c_{krit} = \frac{(45 \cdot 10^6)^2}{1,21 \cdot \pi \cdot (250 \cdot 10^6)^2}$$

$$c_{krit} = 0,0085 \text{ m} = \mathbf{8,5 \text{ mm}}$$

Za pukotine čija je veličina manja od $c_{krit} < 8,5$ mm neće doći do nekontroliranog širenja pukotine već do plastične deformacije plašta spremnika!



Slika 1.47 Izbor materijala prema kriteriju „yield before break”u dijagramu svojstava materijala „ $R_p - K_{1c}$ “

e) Određivanje kritičnog tlaka prema kriteriju „leak before break” (ako je granica tečenja materijala $R_p = 250$ MPa) $c = a > t$

Ukoliko je kritična duljina pukotine $>$ debljina stijenke posude neće doći do nekontroliranog širenja pukotine nego do curenja medija uslijed kontroliranog (sporog) širenja pukotine kroz čitav presjek zavora.

Korištenjem izraza za tangencijalno naprežanje i lomnu žilavost:

$$\sigma_{max} = \frac{r \cdot p}{t} = \sigma_c \quad (1)$$

$$K_{1c} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \quad (2)$$

Uvrštavanjem izraza (1) u izraz (2):

$$K_{1c} = 1.1 \cdot \frac{r \cdot p}{t} \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$$

$$K_{1c} = 1.1 \cdot \frac{r \cdot p_{krit}}{t} \cdot \sqrt{\pi \cdot t}$$

$$p < p_{krit} = \frac{K_{1c} \cdot \sqrt{t}}{1.1 \cdot \sqrt{\pi} \cdot r} = \frac{45 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{0,016}}{1.1 \cdot \sqrt{\pi} \cdot 0,84} = 3,47 \text{ MPa} = \mathbf{34,7 \text{ bar}}$$

Ukoliko je pritisak u spremniku manji od 34,7 bar ne može doći do trenutnog loma već samo do propuštanja (curenja) medija uslijed kontroliranog širenja pukotine kroz čitavu debljinu stijenke (plastična deformacija plašta spremnika je moguća) !

$$\sigma_t = \sigma_1 = R_p = \frac{r \cdot p}{t} \Rightarrow t = \frac{r \cdot p_{krit}}{R_p} \Rightarrow (3)$$

$$K_{1C} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \Rightarrow t = \frac{K_{1C}^2}{1,21 \cdot \pi \cdot R_p^2} \Rightarrow (4)$$

Izjednačavanjem izraza (3) i (4):

$$\frac{r \cdot p_{krit}}{R_p} = \frac{K_{1C}^2}{1,21 \cdot \pi \cdot R_p^2}$$

slijedi

$$p_{krit} = \frac{1}{1,21 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{K_{1C}^2}{R_p}$$

Iz gornjeg izraza slijedi da je indeks za izbor materijala prema kriteriju „leak before break“

$M_2 = \frac{K_{1C}^2}{R_p}$. Na slici 1.48 prikazan je dijagram svojstava materijala „ $R_p - K_{1C}$ “ s prikazanim najviše rangiranim materijalima prema kriteriju „leak before break“, a to su bakar, komercijalno čisti cink, nikal i superlegure na bazi nikla.

$$p_{krit} = \frac{1}{1,21 \cdot \pi \cdot 0,84} \cdot \frac{(45 \cdot 10^6)^2}{250 \cdot 10^6} = 2,53 \text{ MPa} = \mathbf{25,3 \text{ bar}}$$

Iz izraza (2) slijedi:

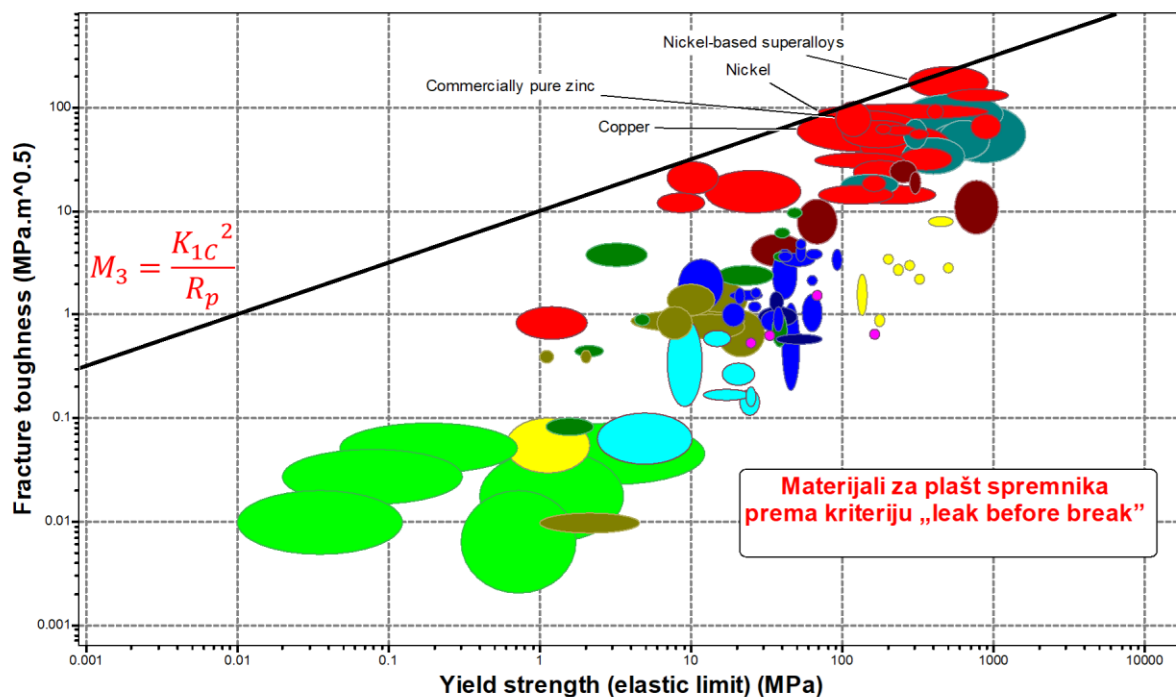
$$c = t = \frac{K_{1C}^2}{1,21 \cdot \pi \cdot R_p^2} = \frac{(45 \cdot 10^6)^2}{1,21 \cdot \pi \cdot (250 \cdot 10^6)^2} = 8,52 \text{ mm}$$

Iz izraza (1) slijedi:

$$t = \frac{r \cdot p_{krit}}{R_p} = \frac{0,84 \cdot 2,53}{250} = 0,0117 \text{ m} = 11,7 \text{ mm}$$

Zaključak:

Ukoliko je pritisak u spremniku manji od 25,3 bar ne može doći ni do trenutnog loma niti do plastične deformacije spremnika (za debljine spremnika $t < 8,52 \text{ mm}$). Moguća je pojava curenja medija postepenim širenjem pukotine! Za debljine $t > 11,7 \text{ mm}$ debljine nema pojave plastične deformacije niti nekontroliranog širenja pukotine za $p < 34,7 \text{ bar}$.



Slika 1.48 Izbor materijala prema kriteriju „leak before break“u dijagramu svojstava materijala „ $R_p - K_{1c}$ “

f) Određivanje kombinacije svojstava za izbor materijala prema kriteriju „fail-safe design“

f1) Najlaganiji spremnik

$$\sigma_{max} = \frac{r \cdot p}{t} \leq \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S} \quad K_1 = 1.1 \cdot \frac{r \cdot p_{max}}{t} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}} \leq K_{1c} \quad c_{lim} = 2 \text{ mm}$$

Obzirom da je slobodna varijabla za izbor debljina plašta spremnika t gornji izraz treba srediti kako slijedi:

$$t \geq 1.1 \cdot \frac{r \cdot p_{max}}{K_{1c}} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}}$$

Masa cilindričnog dijela po jedinici duljine spremnika je:

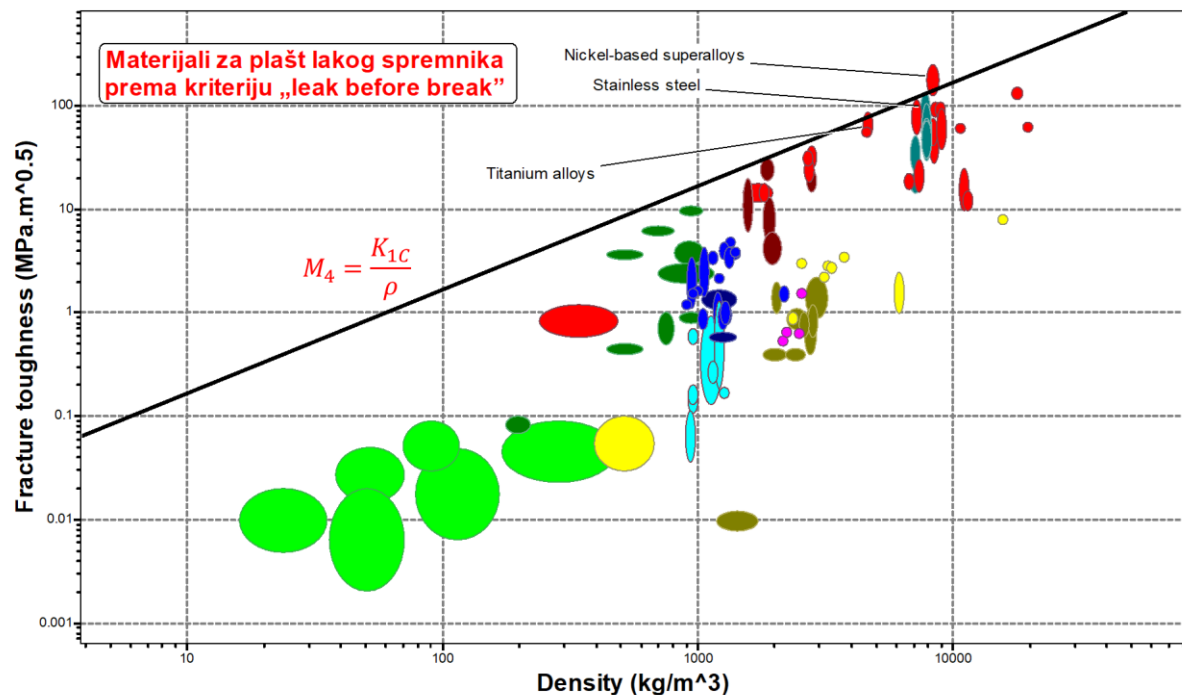
$$m/l = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot t \cdot \rho$$

$$m/l \geq 2 \cdot r \cdot \pi \cdot 1.1 \cdot \frac{r \cdot p_{max}}{K_{1c}} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}} \cdot \rho = 2.2 \cdot \pi \cdot p_{max} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}} \cdot r^2 \cdot \frac{\rho}{K_{1c}}$$

Iz gornjeg izraza slijedi da je indeks za izbor materijala laganog plašta spremnika prema kriteriju „fail safe design“:

$$M_4 = \frac{K_{1c}}{\rho}$$

Na slici 1.49 prikazan je dijagram svojstava materijala „ $\rho - K_{1C}$ “ s prikazanim najviše rangiranim materijalima (legure titana, superlegure na bazi nikla i nehrđajući čelici).



Slika 1.49 Izbor materijala za lagani plašt spremnika prema kriteriju „fail safe design“ u dijagramu svojstava materijala „ $\rho - K_{1C}$ “

f2) Najjeftiniji spremnik

Cijena plašta spremnika je:

$$C = m \cdot C_m$$

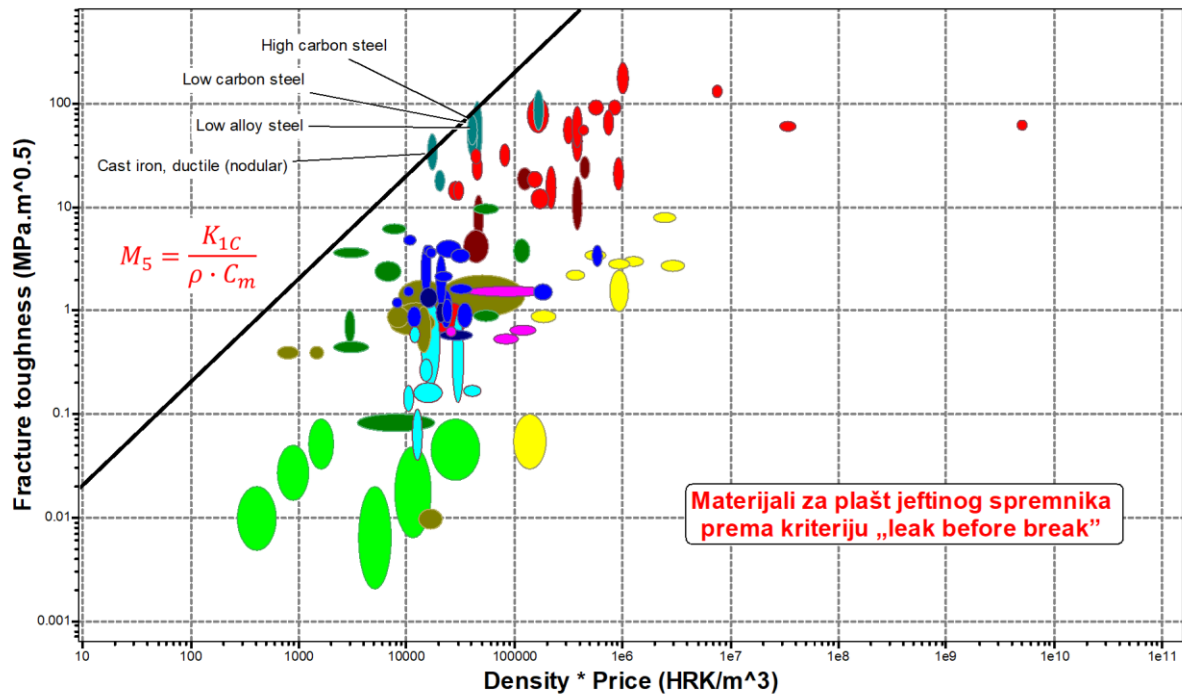
Cijena plašta spremnika po jedinici duljine je:

$$C/l \geq 2.2 \cdot \pi \cdot p_{max} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{lim}} \cdot r^2 \cdot \frac{\rho \cdot C_m}{K_{1C}}$$

Iz gornjeg izraza slijedi da je indeks za izbor materijala jeftinog plašta spremnika prema kriteriju „fail safe design“:

$$M_5 = \frac{K_{1C}}{\rho \cdot C_m}$$

Na slici 1.50 prikazan je dijagram svojstava materijala „ $\rho \cdot C_m - K_{1C}$ “ s prikazanim najviše rangiranim materijalima (nisko i visokouglični čelici, niskolegirani čelici i nodularni lijev).



Slika 1.50 Izbor materijala za jeftini plašt spremnika prema kriteriju „fail safe design“ u dijagramu svojstava materijala „ $\rho \cdot C_m - K_{1c}$ “

1.3.4 Zadatak 3.4 – Lomna žilavost – uzdužni zavari na tlačnom cjevovodu

Cijevi tlačnog cjevovoda (slika 1.51) promjera 450 mm izrađene su savijanjem limova i zavarivanjem uzdužnog spoja. Granica tečenja materijala cijevi je $R_p = 400$ MPa. Debljina stijenke cijevi je $t = 4$ mm. U cjevovodu se nalazi medij pod pritiskom $p = 40$ bar. Obzirom na postupak spajanja u zavaru cjevovoda se mogu očekivati pukotine. Odredite maksimalnu veličinu pukotine u središtu i na površini presjeka zavora koja još uvijek ne utječe na rad cjevovoda. Lomna žilavost materijala iznosi $K_{1c} = 25$ MPa·m^{1/2}.



Slika 1.51 Tlačni cjevovod (lijevo) – uzdužni zavar na cijevi (desno)

Zadane veličine: $d = 450 \text{ mm}$

$$R_p = 400 \text{ MPa}$$

$$t = 4 \text{ mm}$$

$$p = 40 \text{ bar}$$

$$K_{1c} = 25 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

Traži se:

- naprezanje u uzdužnom zavaru cijevi pri radnom opterećenju,
- maksimalno dozvoljenu veličinu pukotine u središtu presjeka zavora ukoliko dođe do preopterećenja $\sigma_c = R_p$,
- maksimalno dozvoljenu veličinu pukotine u središtu presjeka zavora pri radnom preopterećenju,
- maksimalno dozvoljenu veličinu pukotine u središtu presjeka zavora ukoliko dođe do preopterećenja $\sigma_c = R_p$,
- maksimalno dozvoljenu veličinu pukotine na površini zavora pri radnom preopterećenju.

Rješenje

a) Naprezanje u uzdužnom zavaru cijevi pri radnom opterećenju

$$\sigma = \sigma_t = \frac{p \cdot r}{t} = \frac{40 \cdot 10^5 \cdot 0,225}{0,004} = 225 \text{ MPa}$$

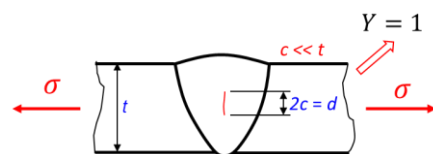
b) Maksimalno dozvoljena veličina pukotine u središtu presjeka zavora u slučaju da dođe do preopterećenja $\sigma_c = R_p$:

$$K_{1c} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \quad \sigma_c = R_p$$

$$c_{krit} = \frac{K_{1c}^2}{\pi \cdot R_p^2} = \frac{(25 \cdot 10^6)^2}{\pi \cdot (400 \cdot 10^6)^2} = 1,24 \text{ mm}$$

$$d_{krit} = 2 \cdot c_{krit} = 2,48 \text{ mm}$$

Ukoliko je duljina pukotine manja od 2,48 mm u slučaju propterećenja dolazi do plastične deformacije. Ako je duljina pukotine veća od 2,48 mm u slučaju propterećenja dolazi do trenutnog loma.



c) Maksimalno dozvoljena veličina pukotine u središtu presjeka zavora pri radnom preopterećenju $\sigma = 225 \text{ MPa}$:

$$c_{krit} = \frac{K_{1c}^2}{\pi \cdot \sigma^2} = \frac{(25 \cdot 10^6)^2}{\pi \cdot (225 \cdot 10^6)^2} = 3,93 \text{ mm}$$

$$d_{krit} = 2 \cdot c_{krit} = 7,86 \text{ mm} > t$$

Kritična duljina pukotine veća od debljine stjenke!

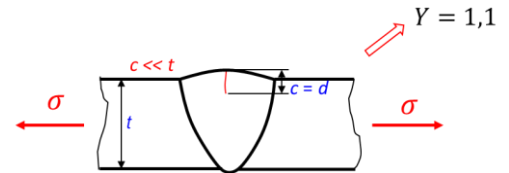
U slučaju da tlak u cjevovodu ne poraste iznad $p = 40$ bar neće doći do trenutnog loma.

Eventualno se pukotina može sporo širiti i uzrokovati curenje medija.

- d) **Maksimalno dozvoljena veličina pukotine na površini zavora u slučaju da dođe do preopterećenja $\sigma_c = R_p$:**

$$K_{1c} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \quad \sigma_c = R_p$$

$$c_{krit} = \frac{K_{1c}^2}{1,1^2 \cdot \pi \cdot R_p^2} = \frac{(25 \cdot 10^6)^2}{1,21 \cdot \pi \cdot (400 \cdot 10^6)^2} = 1,03 \text{ mm}$$



Kritična duljina pukotine u slučaju da dođe do preopterećenja $\sigma_c = R_p$ jest:

$$d_{krit} = c_{krit} = 1,03 \text{ mm}$$

Ukoliko je duljina pukotine manja od 1,03 mm u slučaju propterećenja dolazi do plastične deformacije. Ako je duljina pukotine veća od 1,03 mm u slučaju propterećenja dolazi do trenutnog loma.

- e) **Maksimalno dozvoljena veličina pukotine na površini zavora pri radnom preopterećenju $\sigma = 225$ MPa:**

$$c_{krit} = \frac{K_{1c}^2}{1,1^2 \cdot \pi \cdot \sigma^2} = \frac{(25 \cdot 10^6)^2}{1,21 \cdot \pi \cdot (225 \cdot 10^6)^2} = 3,25 \text{ mm}$$

$$d_{krit} = c_{krit} = 3,25 \text{ mm} < t$$

Kritična duljina pukotine manja od debljine stjenke !!!

U slučaju da tlak u cjevovodu ne raste iznad radnog tlaka $p = 40$ bar može doći do trenutnog loma ukoliko duljina pukotine poraste iznad 3.25 mm.

1.4 Zadaci iz područja termodinamike

1.4.1 Zadatak 4.1 – Toplinska vodljivost – pločasti izmjenjivač topline

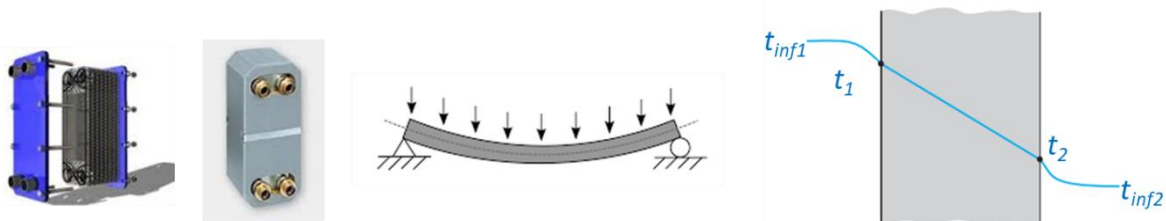
Pločasti izmjenjivač topline (slika 1.52) ima površinu $A = 0,5 \text{ m}^2$. Izmjenjivač provodi toplinu od rashladne vode sustava, temperature $t_{inf1} = 90 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\alpha_v = 350 \text{ W/m}^2\text{K}$), prema slanoj vodi temperature $t_{inf2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\alpha_{sv} = 400 \text{ W/m}^2\text{K}$). Zid izmjenjivača je izrađen iz bakrene ploče ($\lambda = 350 \text{ W/mK}$) stjenke debljine $x = 2 \text{ mm}$.

a) Koliko se ukupno energije Q , W izmjenjuje u izmjenjivaču?

Odrediti temperature unutarnje i vanjske stjenke izmjenjivača t_1 i t_2 (slika 1.52 desno).

b) Ako je debljina stjenke x slobodna veličina, odrediti koji je materijal najbolji ako je cilj minimalna cijena $C/\dot{Q}$, a koji ako je cilj minimalna masa $m/\dot{Q}$ po jedinici izmijenjene topline? Materijal mora imati određenu otpornost na koroziju u morskoj vodi (osrednju). Ograničenja: $A_5 > 5\%$ i $K_{Ic} > 40 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Izmjenjivač treba biti dovoljno čvrst (faktor sigurnosti je $S = 2$) da izdrži isti tlak kao i izmjenjivač iz bakra ($R_p = 60 \text{ MPa}$). Pretpostaviti da je ploča izmjenjivača slobodno oslonjena na krajevima. Razmak između oslonaca je $L = 300 \text{ mm}$.

c) Odrediti pritisak na ploče izmjenjivača ako su iste izrađene iz bakra ($R_p = 60 \text{ MPa}$).



Slika 1.52 Pločasti izmjenjivač topline i pojednostavljena skica opterećenja

Rješenje

a) Ukupna izmjena topline i temperature stjenki izmjenjivača

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (t_{inf1} - t_{inf2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{A \cdot (t_{inf1} - t_{inf2})}{R_{ukupno}} d^2 \geq \left(\frac{64 \cdot l^2 \cdot F \cdot S_i}{n^2 \cdot \pi^3 \cdot E} \right)^{1/2}$$

$$\dot{Q} = \alpha_v \cdot A \cdot (t_{inf1} - t_1) = \lambda \cdot A \cdot \frac{(t_1 - t_2)}{x} = \alpha_{sv} \cdot A \cdot (t_2 - t_{inf2})$$

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (t_{inf1} - t_1)}{\frac{1}{\alpha_v}} = \frac{A \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{x}{\lambda}} = \frac{A \cdot (t_2 - t_{inf2})}{\frac{1}{\alpha_{sv}}}$$

$$(t_{inf1} - t_1) = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_v}$$

$$(t_1 - t_2) = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{x}{\lambda}$$

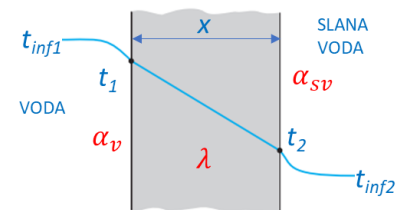
$$(t - t_{inf2}) = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_{sv}}$$

Zbrajanjem tri izraza slijedi:

$$(t_{inf1} - t_{inf2}) = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{sv}} \right)$$

Sređivanjem se dobije:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (t_{inf1} - t_{inf2})}{\frac{1}{\alpha_v} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{sv}}}$$



$$R_{ukupno} = R_{konv1} + R_{kond} + R_{konv2} =$$

$$\frac{1}{\alpha_v} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{sv}} = \frac{1}{350} + \frac{0.002}{350} + \frac{1}{400} = 0,0107 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (t_{inf1} - t_{inf2})}{R_{ukupno}} = \frac{0,5 \cdot (90 - 20)}{0,0107} = 6526,4 \text{ W} \approx 6,5 \text{ KW}$$

$$t_1 = t_{inf1} - \frac{\dot{Q}}{A \cdot \alpha_v} = 90 - \frac{6526,4}{0,5 \cdot 350} = 52,7 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_2 = t_{inf2} + \frac{\dot{Q}}{A \cdot \alpha_{sv}} = 20 + \frac{6526,4}{0,5 \cdot 400} = 52,6 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

b) Izbor materijala izmjenjivača

b1) Minimalna masa po jedinici izmijenjene topline $m/\dot{Q}$

$$\frac{m}{\dot{Q}} = \frac{A \cdot x \cdot \rho}{\frac{A \cdot (t_{inf1} - t_{inf2})}{\frac{1}{\alpha_v} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{sv}}}} = \frac{x}{\Delta t_{inf}} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_v} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{sv}} \right) \cdot \rho =$$

$$\left(\frac{m}{\dot{Q}} \right)_{konv1} + \left(\frac{m}{\dot{Q}} \right)_{kond} + \left(\frac{m}{\dot{Q}} \right)_{konv2}$$



utjecaj izbora materijala

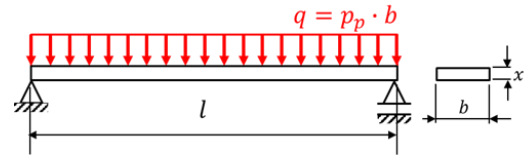
Slijedi da je funkcija cilja:

$$\left(\frac{m}{\dot{Q}}\right)_{kond} = \frac{x}{\Delta t_{inf}} \cdot \frac{x}{\lambda} \cdot \rho = \frac{1}{\Delta t_{inf}} \cdot x^2 \cdot \frac{\rho}{\lambda}$$

Ograničenje čvrstoće materijala izmjenjivača:

$$M_{y,max} = q \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{p_p \cdot b \cdot l^2}{8}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{\frac{p_p \cdot b \cdot l^2}{8}}{\frac{b \cdot x^2}{6}} = \frac{3 \cdot p_p \cdot l^2}{4 \cdot x^2} \leq \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S}$$



Obzirom da je debljina stjenke slobodna varijabla gornji izraz se prikazuje u obliku:

$$x^2 \geq \frac{3 \cdot p_p \cdot l^2 \cdot S}{4 \cdot R_p} \quad (1)$$

Eliminacijom slobodne varijable iz funkcije cilja

$$\left(\frac{m}{\dot{Q}}\right)_{kond} = \frac{1}{\Delta t_{inf}} \cdot x^2 \cdot \frac{\rho}{\lambda} \geq \frac{1}{\Delta t_{inf}} \cdot \frac{3 \cdot p_p \cdot l^2 \cdot S}{4 \cdot R_p} \cdot \frac{\rho}{\lambda}$$

$$\left(\frac{m}{\dot{Q}}\right)_{kond} \geq \frac{3 \cdot p_p \cdot S}{4 \cdot \Delta t_{inf}} \cdot l^2 \cdot \frac{\rho}{\lambda \cdot R_p}$$

Indeks za izbor materijala izmjenjivača minimalne mase po jedinici izmijenjene topline:

$$M_1 = \frac{\lambda \cdot R_p}{\rho}$$

Maksimalizacijom kombinacije svojstava $M_1 = \frac{\lambda \cdot R_p}{\rho}$ minimalizira se masa štapa.

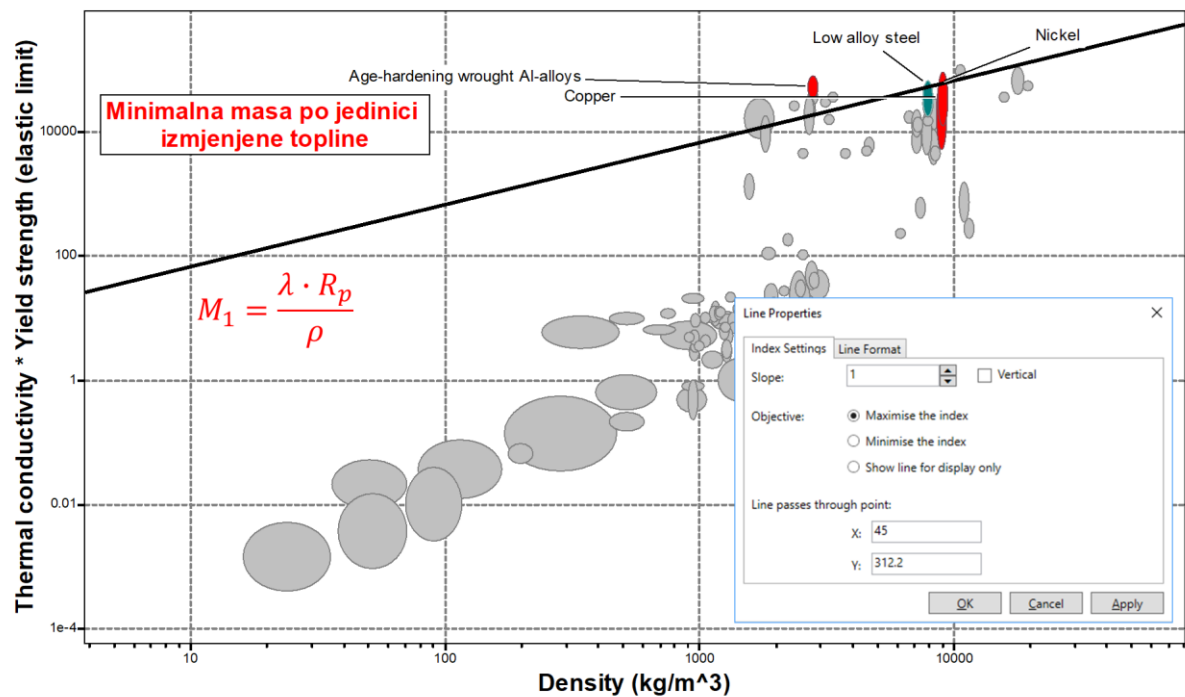
Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije

$\log(\lambda \cdot R_p) = 1 \cdot \log \rho + \log M_1$ gib smjernice za izbor je jednak jedan u dijagramu kojem je os apscisa $\log \rho$, a os ordinata $\log(\lambda \cdot R_p)$ prikazanom na slici 1.54. Najviše rangirani materijal za izradu toplinski učinkovitog laganog izmjenjivača su dozrijevanjem očvrstive gnječilačke legure aluminija. Pored navedenog materijala visokorangirani su i niskolegirani čelici, nikal i bakar.

Dodatna limitirajuća ograničenja lomne žilavosti $K_{1c} \geq 40 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ i rastezljivosti $A \geq 5 \%$ implementirana su u program za izbor materijala (slika 1.53).

▼ Mechanical properties			
	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation	5		% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10 ⁷ cycles			MPa
Fracture toughness	40		MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Slika 1.53 Unos limitirajućih ograničenja lomne žilavosti i rastezljivosti u programu Granta Edupack



Slika 1.54 Dijagram svojstava materijala „ $\log \rho - \log(\lambda \cdot R_p)$ “

b1) Minimalna cijena po jedinici izmijenjene topline $C/\dot{Q}$

$$\left(\frac{C}{\dot{Q}}\right)_{kond} \geq \frac{3 \cdot p_p \cdot S}{4 \cdot \Delta t_{inf}} \cdot l^2 \cdot \frac{\rho \cdot C_m}{\lambda \cdot R_p}$$

Indeks za izbor materijala izmjenjivača minimalne mase po jedinici izmijenjene topline:

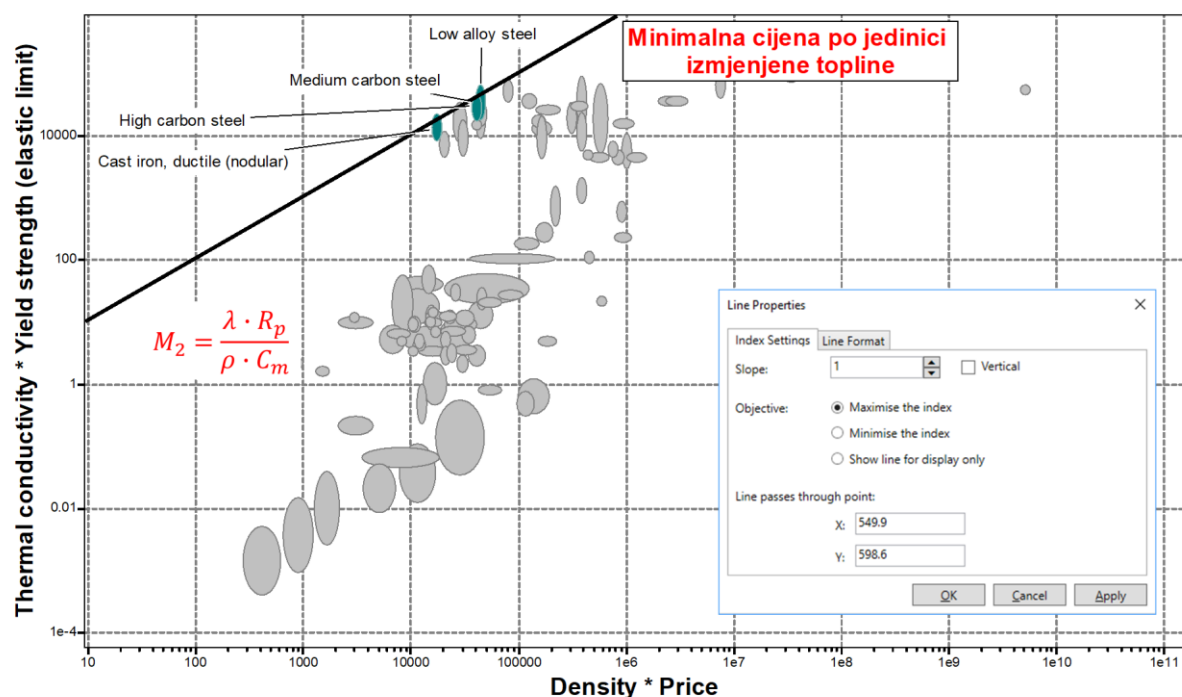
$$M_2 = \frac{\lambda \cdot R_p}{\rho \cdot C_m}$$

Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije

$$\log(\lambda \cdot R_p) = \mathbf{1} \cdot \log(\rho \cdot C_m) + \log M$$

Nagib smjernice za izbor je jednak jedan u dijagramu kojem je os apscisa $\log(\rho \cdot C_m)$, a os ordinata $\log(\lambda \cdot R_p)$ prikazanom na slici 1.55. Najviše rangirani materijal za izradu toplinski učinkovitog jeftinog izmjenjivača su niskolegirani čelici, visoko i srednje ugljični čelici te nodularni lijev.

Uključivanje dodatna limitirajućih ograničenja je prikazano na slici 1.53.



Slika 1.55 Dijagram svojstava materijala „ $\log(\rho \cdot C_m) - \log(\lambda \cdot R_p)$ “

c) Pritisak na bakrene ploče izmjenjivača

Iz izraza (1) može se odrediti veličina pritiska na bakrenu ploču:

$$p_p = \frac{4 \cdot x^2 \cdot R_{p,Cu}}{3 \cdot l^2 \cdot S} = \frac{4 \cdot 0,002^2 \cdot 60}{3 \cdot 0,3^2 \cdot 2} = 0,0018 \text{ MPa}$$

1.4.2 Zadatak 4.2 – Toplinsko širenje – Aluminijska cijev čvrsto učvršćena na betonski zid

Cijev iz aluminijske je kruto učvršćena za pročelje betonske zgrade. Za vrućih dana pročelje, direktno izloženo suncu, se zagrije na 80 °C. Koliko će biti toplinsko naprezanje uslijed različite toplinske deformacije ako je montaža cijevi na pročelje obavljena pri temperaturi 20 °C?

Zadane veličine:

$$\alpha_{Al} = 22,5 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C} \quad \text{koeficijent toplinskog širenja aluminija}$$

$$\alpha_B = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C} \quad \text{koeficijent toplinskog širenja betona}$$

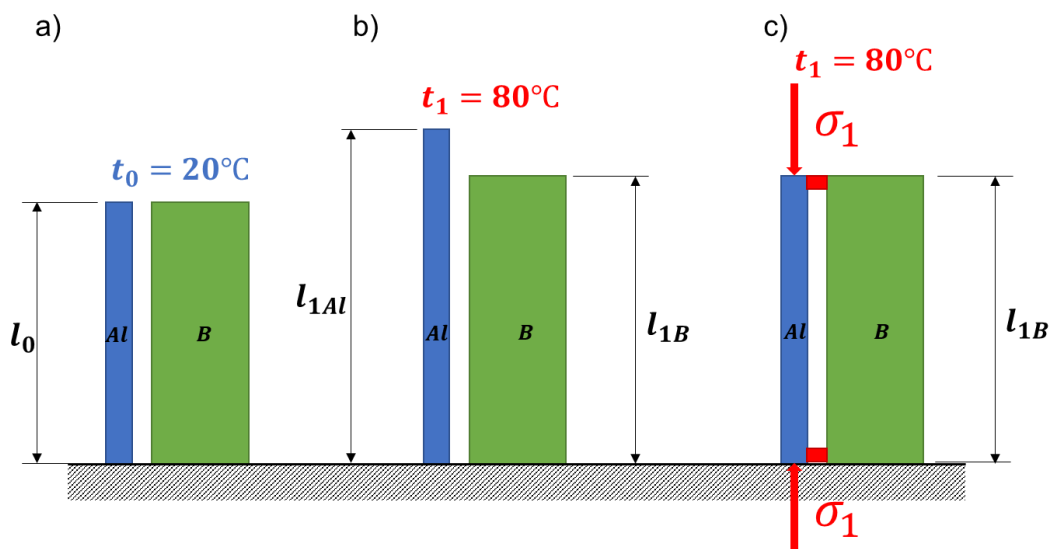
$$E_{Al} = 75 \text{ GPa} \quad \text{modul elastičnosti aluminija}$$

Traži se:

$$\sigma_{Al}, \text{ MPa} \quad \text{naprezanje u cijevi iz aluminija}$$

Rješenje

Na slici 1.56a) prikazani su cijev iz aluminija i betonski zid prije učvršćenja cijevi na zid na sobnoj temperaturi. Na slici b) prikazana je toplinska dilatacija neučvršćene cijevi i zida. Obzirom na veći koeficijent toplinskog širenja produljenje aluminijske cijevi je veće od betonskog zida. Na slici c) prikazana je toplinska deformacija učvršćene aluminijske cijevi na betonski zid. Kako je krutost zida znatno veća od krutosti cijevi očito je da će produljenje aluminijske cijevi biti jednako produljenju zida. Obzirom na veći koeficijent toplinskog širenja u materijalu aluminijske cijevi pojaviti će se znatnija tlačna naprezanja.



Slika 1.56 Shematski prikaz aluminijske cijev i betonskog zida

Ukupna duljina neučvršćene aluminijske cijevi i betonskog zida nakon porasta temperature na 80°C :

$$l_{1Al} = l_0 \cdot (1 + \alpha_{Al} \cdot \Delta t)$$

$$l_{1B} = l_0 \cdot (1 + \alpha_B \cdot \Delta t)$$

Razlika u duljini cijevi i zida na temperaturi 80 °C:

$$\Delta l_{Al} = l_{1Al} - l_{1B} = l_0 \cdot (\alpha_{Al} - \alpha_B) \cdot \Delta t$$

Ako je cijev bila kruto učvršćena na zid na temperaturi 20 °C, porastom temperature na 80 °C u materijalu aluminijske cijevi javlja tlačna deformacija koja iznosi:

$$\varepsilon_{Al} = \frac{\Delta l_{Al}}{l_{1Al}} = \frac{l_0 \cdot (\alpha_{Al} - \alpha_B) \cdot \Delta t}{l_0 \cdot (1 + \alpha_{Al} \cdot \Delta t)} = \frac{(\alpha_{Al} - \alpha_B) \cdot \Delta t}{1 + \alpha_{Al} \cdot \Delta t}$$

Primjenom Hookeovog zakona može se odrediti naprezanje u materijalu aluminijske cijevi:

$$\sigma_{Al} = E_{Al} \cdot \varepsilon_{Al} = E_{Al} \cdot \frac{(\alpha_{Al} - \alpha_B) \cdot \Delta t}{1 + \alpha_{Al} \cdot \Delta t}$$

$$\sigma_{Al} = 75 \cdot 10^9 \cdot \frac{(22,5 \cdot 10^{-6} - 9 \cdot 10^{-6}) \cdot 60}{1 + 22,5 \cdot 10^{-6} \cdot 60}$$

$$\sigma_{Al} = 60,67 \text{ MPa}$$

1.4.3 Zadatak 4.3 – Toplinska difuzivnost

U šalicu sobne temperature ulivena je kipuća voda. Stijenka šalice je debljine $x = 3 \text{ mm}$.

- Koliko vremena (u sekundama) imate na raspolaganju da prenesete šalicu do stola (prije nego šalina postane previše topla)?
- Koja je kombinacija svojstava bitna ukoliko je cilj izraditi laganu šalicu koja se neće prebrzo zagrijavati?

Napomena: Šalina treba biti donekle i žilava $K_{1C} \geq 20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$

Svojstva materijala šalice:

- toplinska vodljivost $\lambda = 1,1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$
- gustoća $\rho = 2450 \text{ kg/m}^3$
- specifični toplinski kapacitet $c_p = 800 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$



Rješenje

a) Vrijeme potrebno da se vanjska stijenka šalice znatnije zagrije

Nestacionarni toplinski tok kroz krutu materiju zavisi o svojstvu materijala koje se zove - toplinska difuzivnost a , m^2/s :

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} = \frac{1,1}{2450 \cdot 800} = 5,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Udaljenost Δx od površine do presjeka do koje toplina dopire u vremenskom periodu Δt :

$$\Delta x = \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta t}$$

Na temelju prethodna dva izraza slijedi vrijeme potrebno da se šalica pretjerano zagrije:

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a} = \frac{0,003^2}{2 \cdot 5,6 \cdot 10^{-7}} = 8,035 \text{ s}$$

b) Kombinacija svojstava materijala koja utječe na brzinu zagrijavanja stijenke šalice

Masa šalice iznosi:

$$m = x \cdot A \cdot \rho \quad \text{gdje je } A \text{ površina plašta šalice}$$

$$m \geq \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta t} \cdot A \cdot \rho$$

$$m \geq \sqrt{2 \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \Delta t} \cdot A \cdot \rho$$

$$m \geq \sqrt{2 \cdot \Delta t} \cdot A \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \rho}{c_p} \right)^{1/2}$$

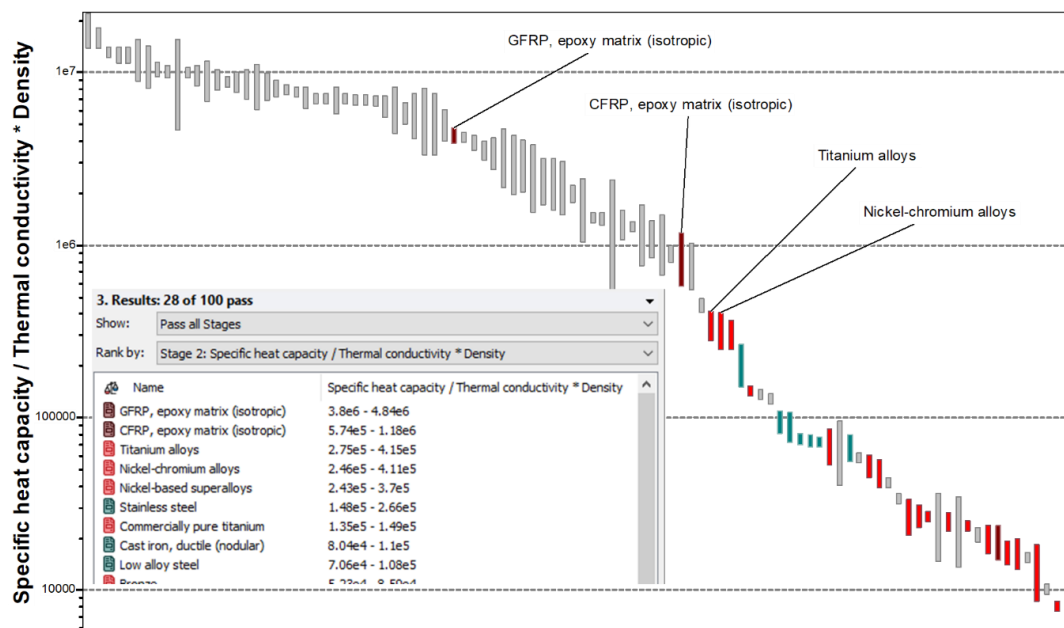
Slijedi da je indeks za izbor materijala šalice čija se stijenka neće prebrzo zagrijavati:

$$M = \frac{c_p}{\lambda \cdot \rho}$$

Na slici 1.57 prikazan je unos limitirajućeg ograničenja lomne žilavosti u program.

▼ Mechanical properties			
	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation			% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10 ⁷ cycles			MPa
Fracture toughness	20		MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Slika 1.57 Unos limitirajućeg ograničenja lomne žilavosti u program Granta Edupack



Slika 1.58 Trakasti dijagram svojstava materijala za indeks $M = \frac{C_p}{\lambda \cdot \rho}$

Iz izraza za indeks materijala vidljivo je da je smjernica za izbor nagiba „1“ u trakastom dijagramu svojstava materijala čija je os apscisa upravo indeks materijala $M = \frac{C_p}{\lambda \cdot \rho}$ (slika 1.58).

Poredak materijala od najviše rangiranog ka manje rangiranim materijalima je: GFRP (kompozit plastike ojačane staklenim vlaknima), CFRP (kompozit plastike ojačane karbonskim vlaknima), legure titana, krom-nikal legure ...

1.4.4 Zadatak 4.4 – Specifični toplinski kapacitet

Kolika je količina benzina potrebna za zagrijavanje bakrene kocke dimenzije stranica 100 mm od sobne temperature $t_{ok} = 20^\circ\text{C}$ do tališta?

Iz literature se može odrediti talište, specifična toplina i gustoća bakra:

$$t_m = 1083^\circ\text{C} \quad C_p = 380 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad \rho = \frac{8930 \text{ kg}}{\text{m}^3}$$

Količina topline koja se oslobađa izgaranjem 1 litre benzina iznosi: $q = 35000 \frac{\text{kJ}}{\text{lit}}$

Napomena: Pretpostaviti da toplinski gubici pri zagrijavanju iznose 20%, odnosno stupanj učinkovitosti pri zagrijavanju iznosi $\eta = 80\%$.

Rješenje

Količina energije potrebna za zagrijavanje bakrene kocke od temperature okoline do tališta:

$$\Delta Q_{Cu} = \rho_{Cu} \cdot V \cdot C_{p,Cu} \cdot \Delta T = \rho_{Cu} \cdot a^3 \cdot C_{p,Cu} \cdot (t_m - t_{OK})$$

$$\Delta Q_{Cu} = 8930 \cdot 0,1^3 \cdot 380 \cdot (1083 - 20) = 36411000 \text{ J} = 3641,1 \text{ kJ}$$

Količina energije koja se mora osloboditi izgaranjem benzina:

$$\Delta Q_B = \frac{\Delta Q_{Cu}}{\eta_B} = \frac{3641,1}{0,8} = 4551,4 \text{ kJ}$$

Količina benzina potrebnog za zagrijavanje bakrene kocke:

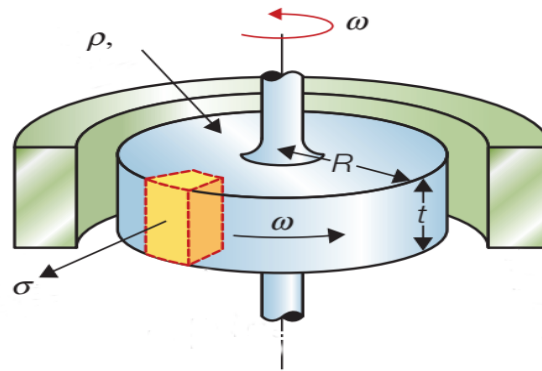
$$V_B = \frac{\Delta Q_B}{q_{B,l}} = \frac{4551,4}{35000} = 0,13 \text{ lit}$$

1.5 Zadaci iz područja dinamike

1.5.1 Zadatak 5.1 – Centrifugalne sile

Zamašnjak (slika 1.59) radijusa $R = 250 \text{ mm}$ je konstruiran za $n = 12000 \text{ okr/min}$. Pretpostavka je da će zamašnjak biti izrađen iz lijevanog željeza. U lijevaonici se garantira da u središnjem dijelu materijala neće biti pogrešaka oblika pukotine duljine veće od $2 \cdot a = 2 \text{ mm}$. Gustoća materijala je $\rho = 7100 \text{ kg/m}^3$.

- Izvršiti provjeru čvrstoće zamašnjaka ukoliko je granica tečenja materijala $R_p = 350 \text{ MPa}$, Poissonov koeficijent $\nu = 0,33$.
- Dali će doći do pojave plastične deformacije, a ako neće odrediti faktor sigurnosti $S = ?$
- Dali će doći do loma pri maksimalnom radnom opterećenju ako je lomna žilavost materijala $K_{Ic} = 15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ukoliko se u području maksimalnih naprezanja pojavi pukotina duljine $2 \cdot a = 2 \text{ mm}$ u središtu presjeka
- Odrediti najbolje materijale prema kriteriju „yield-before-brake” ako materijal diska mora imati visoku krutost tj. $E \geq 150 \text{ GPa}$.



Slika 1.59 Geometrija i naprezanje u zamašnjaku

Rješenje**1) Provjera čvrstoće zamašnjaka**

Maksimalno naprezanje se određuje primjenom izraza iz priručnika:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{8} \cdot (3 + \nu) \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2$$

gdje je ω kutna brzina zamašnjaka:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 12000}{30} = 1256,6 \text{ s}^{-1}$$

Uvrštavanje vrijednosti slijedi:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{8} \cdot (3 + 0,33) \cdot 7100 \cdot 1256,6^2 \cdot 0,25^2 = 291,67 \text{ MPa} < R_p$$

2) Plastična deformacija i faktor sigurnosti

Naprezanje koje se javlja u materijalu zamašnjaka manje je od granice tečenja pa neće doći do plastične deformacije materijala za vrijeme rada.

Obzirom da je maksimalno naprezanje koje se smije pojaviti u materijalu zamašnjaka:

$$\sigma_{max} = \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S}$$

Faktor sigurnosti je:

$$S = \frac{R_p}{\sigma_{max}} = \frac{350}{291,67} = 1,2$$

3) Provjera mogućnosti loma u radu zamašnjaka

Izraz za lomnu žilavost materijala:

$$K_{1C} = Y \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

Obzirom da je pukotina u središnjem presjeku $Y = 1$.

$$\sigma_c = \frac{K_{1c}}{C \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} = \frac{15}{1 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,001}} = 267,62 < \sigma_{max}$$

Zaključak: Ukoliko se u području maksimalnih naprezanja pojavi pukotina duljine 2 mm doći će do pojave trenutnog loma jer je kritično naprezanje za lom manje od maksimalnog naprezanja koje se javlja u radu. Treba odabrati materijal veće lomne žilavosti ili ispitivanjima utvrditi da u zamajcu nema pukotine kritične duljine!

4) Izbor materijala prema kriteriju „yield-before-brake”

Izraz za lomnu žilavost materijala:

$$K_{1c} = Y \cdot \sigma_c \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

Ako je kritična veličina naprezanja veća od granice tečenja neće doći do pojave trenutnog loma materijala:

$$\sigma_c > R_p$$

$$K_{1c} > Y \cdot R_p \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{krit}}$$

Kritična duljina pukotine pri kojoj dolazi do loma:

$$c_{krit} < \frac{K_{1c}^2}{1,21 \cdot \pi \cdot R_p^2} = \frac{1}{1,21 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_{1c}}{R_p} \right)^2$$

Slijedi da je kombinacija svojstava materijala za izbor (indeks materijala):

$$M = \frac{K_{1c}}{R_p}$$

Najbolji materijali za izbor su oni za koje je kritična duljina pukotine c_{krit} maksimalna. Za vrijednosti $c < c_{krit}$ u slučaju preopterećenja dolazi do plastične deformacije zamajca. Ako je $c > c_{krit}$ kod preopterećenja bi došlo do trenutnog loma.

Maksimalizacijom indeksa materijala $M = \frac{K_{1c}}{R_p}$ maksimizira se kritična duljina pukotine (smanjuje se osjetljivost zamašnjaka na postojeće pukotine).

Logaritmiranjem i sređivanjem indeksa se dobije:

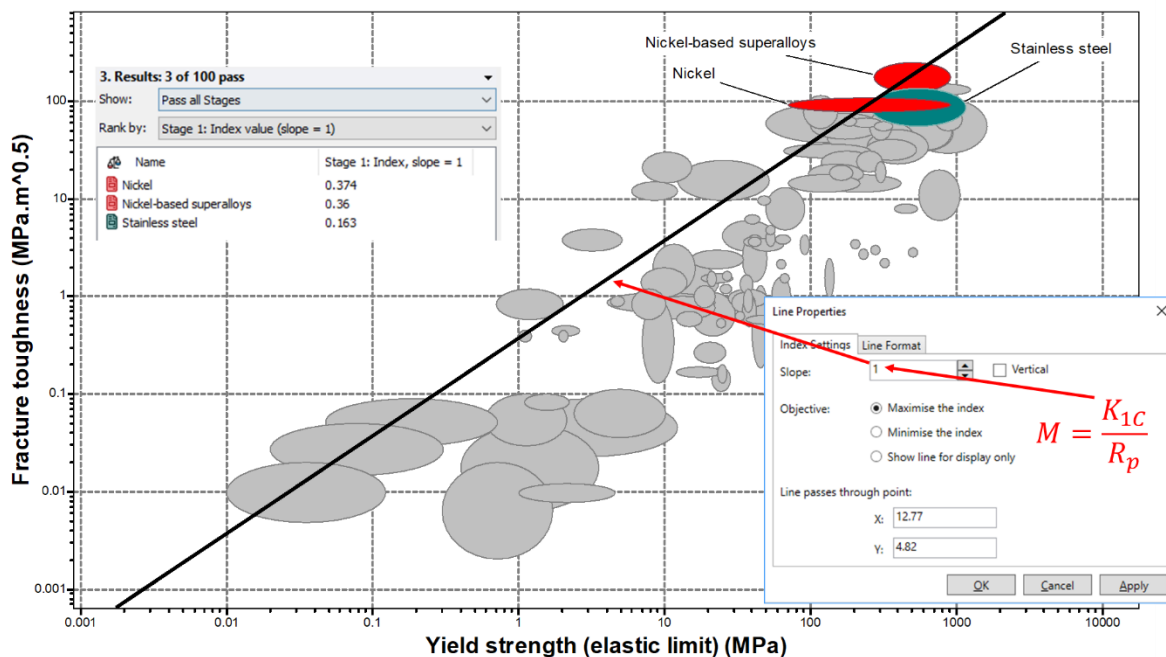
$$\log K_{1C} = \mathbf{1} \cdot \log R_p + \log M$$

gdje je „1“ nagib smjernice za izbor materijala u dijagramu svojstava materijala $\log R_p - \log K_{1C}$ prikazanom na slici 1.61. Najviše rangirani materijali za izradu zamašnjaka su: nikal, superlegure na bazi nikla i nehrđajući čelici.

Limitirajuće ograničenje krutosti materijala $E \geq 150$ GPa implementirano je u program za izbor materijala (slika 1.60).

Property	Minimum	Maximum	Unit
Young's modulus	150		GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation			% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10 ⁷ cycles			MPa
Fracture toughness			MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

Slika 1.60 Unos limitirajućeg ograničenja krutosti materijala



Slika 1.61 Dijagram svojstava materijala $\log R_p - \log K_{1C}$

2 OSNOVE IZBORA MATERIJALA

U ovom poglavlju riješeni su primjeri zadataka koji uključuju jedan cilj i jedno aktivno ograničenje, a primjenom sustavnog postupka rješavanja problema. Korištena metodologija za izbor materijala kroz četiri koraka:

- 1) **prevođenje zahtjeva dizajna** – pronalaženje ograničenja (jednostavnih, limitirajućih i aktivnih) i ciljeva izbora
- 2) **identifikacija** – prepoznavanje materijala koji zadovoljavaju ograničenja
- 3) **rangiranje** – potencijalnih materijala po njihovoj sposobnosti za povećanje učinkovitosti dizajna (optimizacija cilja)
- 4) **pretraživanje dokumentacije**

Prva tri koraka su detaljno razrađeni u tablici 2.1.

Tablica 2.1 Detaljni postupak određivanja indeksa materijala

Korak	Akcija
1	Definirati zahtjeve dizajna – tablica sa zahtjevima dizajna: a) Funkcija: što je uloga komponente? b) Ograničenje: značajni zahtjevi koji moraju biti ispunjeni: krutost, čvrstoća, otpornost na koroziju, sposobnost oblikovanja c) Cilj: što treba maksimizirati ili minimizirati? d) Slobodne varijable: koje varijable problema nisu obuhvaćene ograničenjima
2	Odrediti ograničenja (ne smije doći do tečenja materijala, loma ili izvijanja...) i ako je neophodno ograničenja opisati matematičkom funkcijom
3	Izraditi matematički model funkcije cilja u ovisnosti o zahtjevima dizajna, geometriji i svojstvima materijala
4	Identificirati slobodne varijable
5	Izvršiti zamjenu slobodnih varijabli iz izraza za ograničenje u funkciju cilja
6	Izvršiti grupiranje varijabli funkcije cilja u tri skupine: funkcionalnih zahtjeva F, geometrijskih G i svojstava materijala M tako da: • matrica performansi $P \leq f_1(F) \cdot f_2(G) \cdot f_3(M)$ - maksimalizacija ili • matrica performansi $P \geq f_1(F) \cdot f_2(G) \cdot f_3(M)$ - minimalizacija
7	Odrediti indeks materijala , izražen kao veličina M kojom optimiziramo matricu performansi P. Matrica materijala M predstavlja kriterij izvrsnosti .

2.1.1 Zadatak 1 - Izbor materijala za lako veslo

Uvod

Zasluga za izum vesala najvjerojatnije pripada Egipćanima. Prve slike s brodovima na vesla su reljefi u građevinama u Egiptu između 3300 i 3000 PNE – slika 2.1.



Slika 2.1 Jedan od najstarijih reljefa s prikazom broda na vesla

Brodovi su prije izuma parnog stroja bili pogonjeni na jedra, guranjem ili veslima. Vesla su osiguravala bolju kontrolu broda od prethodna dva pogona (vojni brodovi starog vijeka bili su pogonjeni veslima). Zapis o veslačkim natjecanjima datiraju iz 1716. Prvi natjecatelji su bili splavari koji su prevozili ljude i dobra preko rijeke. Postepeno su i viši slojevi društva (osobito iz Oxford-a i Cambridge-a) počeli sudjelovati na natjecanjima – što dovodi do razvoja sofisticiranije opreme i pravila. Pravi pokretač razvoja sportskih brodova i vesala je bilo utemeljenje veslanja kao olimpijskog sporta 1900. g.

Zadatak

Izvršiti odabir najboljeg materijala za izradu „mekog” laganog vesla za sport.

Zadano:

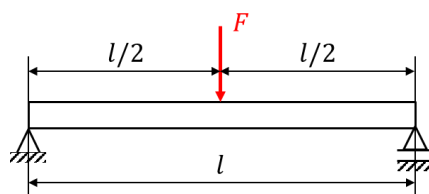
- savojna krutost S
- duljina vesla L
- žilavost $G_{IC} > 1 \text{ KJ/m}^2$.

U tablici 2.2 prikazani su zahtjevi dizajna za izradu lakog sportskog vesla.

Tablica 2.2 Zahtjevi dizajna za izradu lakog krutog vesla

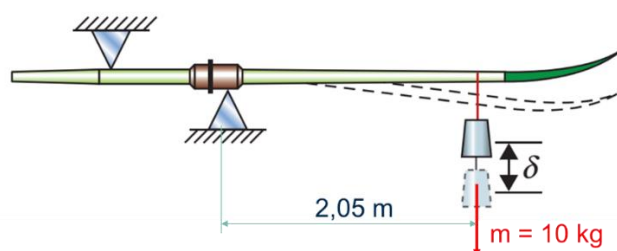
Zahtjevi dizajna za veslo	
FUNKCIJA	Veslo - laka greda opterećena na savijanje
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - specificirana duljina vesla L Limitirajuća ograničenja - specificirana minimalna žilavost materijala (radnja loma) $G_{1C} > 1 \text{ kJ/m}^2$ Aktivno ograničenje - savojna krutost vesla S
CILJ	Minimalna masa m vesla
SLOBODNE VARIJABLE	- Izbor materijala - Promjer vesla d

Mehanički promatrano veslo predstavlja gredu opterećenu na savijanje (slika 2.2). Veslo mora biti dovoljno čvrsto kako bi izdržalo moment savijanja bez oštećenja, te mora imati krutost koja odgovara veslaču koji ga koristi. „Osjećaj” prilikom veslanja mora biti odgovarajući i što je najvažnije veslo mora biti što laganije.



Slika 2.2 Pojednostavljena skica opterećenja vesla

Vesla se dizajniraju prema krutosti – dakle određeno opterećenje mora rezultirati određenim elastičnim progibom vesla. Na slici 2.3 prikazan je način određivanja krutosti vesla. Uteg od 10 kg se ovjesi na veslo učvršćeno prema slici na udaljenosti 2,05 m od oslonca (maškete).



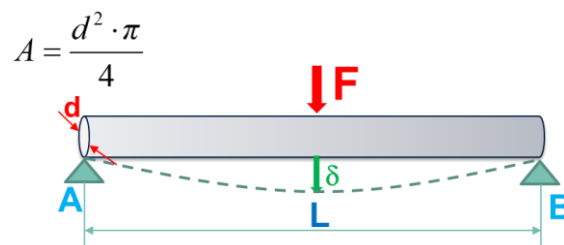
Slika 2.3 Način određivanja krutosti sportskog vesla

Ovisno o tipu vesla uteg mora ostvariti točno određeni progib prema tablici 2.3.

Tablica 2.3 Tipovi vesla prema progibu

Tip vesla	Progib δ , mm
Meko veslo	50
Tvrdo veslo	30

Na slici 2.4 prikazano je veslo pojednostavljeno kao jednostavno oslonjena greda kružnog presjeka opterećena na savijanje centralnom silom F .



Slika 2.4 Pojednostavljena skica opterećenja vesla

Progib grede je proporcionalan sili, a obrnuto proporcionalan krutosti:

$$\delta = \frac{F}{S} \Rightarrow S = \frac{F}{\delta} \quad (1)$$

Jednadžba za progib grede može se odrediti rješavanjem diferencijalne jednadžbe za elastičnu liniju grede postavljanjem rubnih uvjeta:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I}$$

Integriranjem jednadžbe elastične linije:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I} = -\frac{\left(\frac{F}{2} \cdot x\right)}{E \cdot I}$$

$$\phi = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot x \cdot dx$$

$$\phi = -\frac{F}{4 \cdot E \cdot I} \cdot x^2 + C_1$$

$$\text{Uvrštavanjem rubnog uvjeta: } x = \frac{L}{2} \Rightarrow \phi = 0$$

$$C_1 = \frac{F \cdot L^2}{16 \cdot E \cdot I} \Rightarrow \phi = \frac{F \cdot (L^2 - 4 \cdot x^2)}{16 \cdot E \cdot I}$$

Nadalje, integracijom se dobiva izraz za progib:

$$\frac{dy}{dx} = \phi \Rightarrow y = \int \phi \cdot dx \Rightarrow y = \frac{F}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \int (L^2 - 4 \cdot x^2) \cdot dx$$

$$y = \frac{F}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - \frac{4 \cdot x^3}{3} \right) + C_2$$

Uvrštavanjem rubnog uvjeta: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$y = \frac{F}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - \frac{4 \cdot x^3}{3} \right) \Rightarrow \delta \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_y} \quad (2)$$

Najčešće se formule za konkretni problem ne izvode već se koriste podaci iz raspoloživih priručnika za određene slučajeve opterećenja kako je prikazano na slici 2.5.

Oblik presjeka	Površ. A m ²	Moment I m ⁴	Moment K m ⁴	Moment Z m ³	Mom. Q m ³	Mom. Z _p m ³
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{3} (1 - 0.98 \frac{b}{h})$ (h > b)	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{b^2 h^2}{(3h+1.8b)}$ (h > b)	$\frac{bh^2}{4}$
	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3} a^4}{80}$	$\frac{a^3}{32}$	$\frac{a^3}{20}$	$\frac{3a^3}{64}$
	πr^2	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{2}$	$\frac{\pi r^3}{4}$	$\frac{\pi r^3}{2}$	$\frac{\pi r^3}{3}$
	πab	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	$\frac{\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$	$\frac{\pi a^2 b}{4}$	$\frac{\pi a^2 b}{2} (a < b)$	$\frac{\pi a^2 b}{3}$
	$\pi(r_o^2 - r_i^2)$ $\approx 2\pi r t$	$\frac{\pi}{4}(r_o^4 - r_i^4)$ $\approx \pi r^3 t$	$\frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4)$ $\approx 2\pi r^3 t$	$\frac{\pi}{4}(r_o^4 - r_i^4)$ $\approx \pi r^3 t$	$\frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4)$ $\approx 2\pi r^3 t$	$\frac{\pi}{3}(r_o^3 - r_i^3)$ $\approx \pi r^3 t$
	$2t(h+b)$ (h, b >> t)	$\frac{1}{6} h^3 (1 + 3 \frac{b}{h})$	$\frac{2t b^2 h^2}{(h+b)} (1 - \frac{1}{h})$	$\frac{1}{3} h^2 t (1 + 3 \frac{b}{h})$	$2t b h (1 - \frac{1}{h})$	$b h t (1 + \frac{b}{2h})$
	$\pi(a+b)t$ (a, b >> t)	$\frac{\pi}{4} a^2 t (1 + \frac{3b}{a})$	$\frac{4\pi(a b)^{3/2} t}{(a^2 + b^2)}$	$\frac{\pi}{4} a^2 t (1 + \frac{3b}{a})$	$2\pi t (a b)^{1/2} (b > a)$	$\pi a b t (2 + \frac{b}{a})$
	$b(h_o - h_i)$ $\approx 2bt$ (h, b >> t)	$\frac{b}{12} (h_o^3 - h_i^3)$ $\approx \frac{1}{2} b t h_o^2$	---	$\frac{b}{6} h_o^2 (h_o^2 - h_i^2)$ $\approx b t h_o$	---	$\frac{b}{4} (h_o^2 \cdot h_i^2)$ $\approx b t h_o$
	$2t(h+b)$ (h, b >> t)	$\frac{1}{6} h^3 (1 + 3 \frac{b}{h})$	$\frac{2}{3} b t^3 (1 + 4 \frac{h}{b})$	$\frac{1}{3} h^2 t (1 + 3 \frac{b}{h})$	$\frac{2}{3} b t^2 (1 + 4 \frac{h}{b})$	$b h t (1 + \frac{h}{2b})$
	$2t(h+b)$ (h, b >> t)	$\frac{1}{6} (h^3 + 4b h^2)$	$\frac{t^3}{3} (3b + h)$	$\frac{1}{3h} (h^3 + 4b h^2)$	$\frac{t^2}{3} (3b + h)$	$\frac{b h^2}{2} (1 + \frac{2t(b-2h)}{h^2})$

	C_1	C_2	$\delta = \frac{FL^3}{C_1 EI} = \frac{ML^2}{C_2 EI}$
	8	6	$\theta = \frac{FL^2}{C_2 EI} = \frac{ML}{C_2 EI}$
	2	1	
	48	16	
	$\frac{384}{5}$	24	
	192	-	
	384	-	
	6	-	
	-	4	
	-	3	

I - moment tromosti presjeka
 E - Young-ov modul elastičnosti
 δ - progib
 F - sila
 M - moment
 L - duljina grede
 t - visina presjeka grede
 θ - nagib
 y - udaljenost od neutralne linije
 R - radijus zakrivljenosti

$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = \frac{M}{R}$

Slika 2.5 Gotovi izrazi za geometrijske značajke presjeka (lijevo) i elastično savijanje grede (desno) u priručniku s korisnim rješenjima

Za okrugli presjek moment tromosti površine je:

$$I = \frac{d^4 \cdot \pi}{64} \quad (3)$$

Zamjenom (3) u izrazu (2):

$$\delta = \frac{4 \cdot F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot d^4 \cdot \pi} \sqrt{\frac{4 \cdot F \cdot L^3}{3 \cdot \pi \cdot E \cdot \delta_{\max}}} \quad (4)$$

Kako bi se izradilo lagano veslo cilj je minimalna masa vesla. Masa vesla je:

$$m = \rho \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot L \quad (5)$$

Eliminacijom slobodne varijable tj. zamjenom d^2 u izrazu (5) s (4), te uvrštavanjem krutosti iz (1) dobije se funkcija cilja:

$$m = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot L \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot S \cdot L^3}{3 \cdot \pi \cdot E}}$$

Sređivanjem izraza slijedi:

$$m = \left(\frac{\pi \cdot S}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(L^{5/2} \right) \cdot \left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (6)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{G}] \cdot [\mathbf{M}]$$

gdje su:

F – utjecaj funkcije na učinkovitost

G – utjecaj geometrije na učinkovitost

M – utjecaj svojstva materijala na učinkovitost

Iz izraza za učinkovitost sustava (6) vidljivo je da će masa biti minimalna ukoliko je veličina koja objedinjuje svojstva materijala $\left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \right)$ minimalna tj. ako je njezina recipročna vrijednost (indeks materijala) maksimalna:

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}}} \right) \quad (7)$$

Za izbor materijala koristi se dijagram svojstava materijala (slika 2.6) u kojem je os apscisa gustoća ρ , kg/m³, a ordinata Youngov modul elastičnosti E , GPa materijala. Obzirom da su osi dijagrama u logaritamskom mjerilu izraz (7) treba logaritmirati:

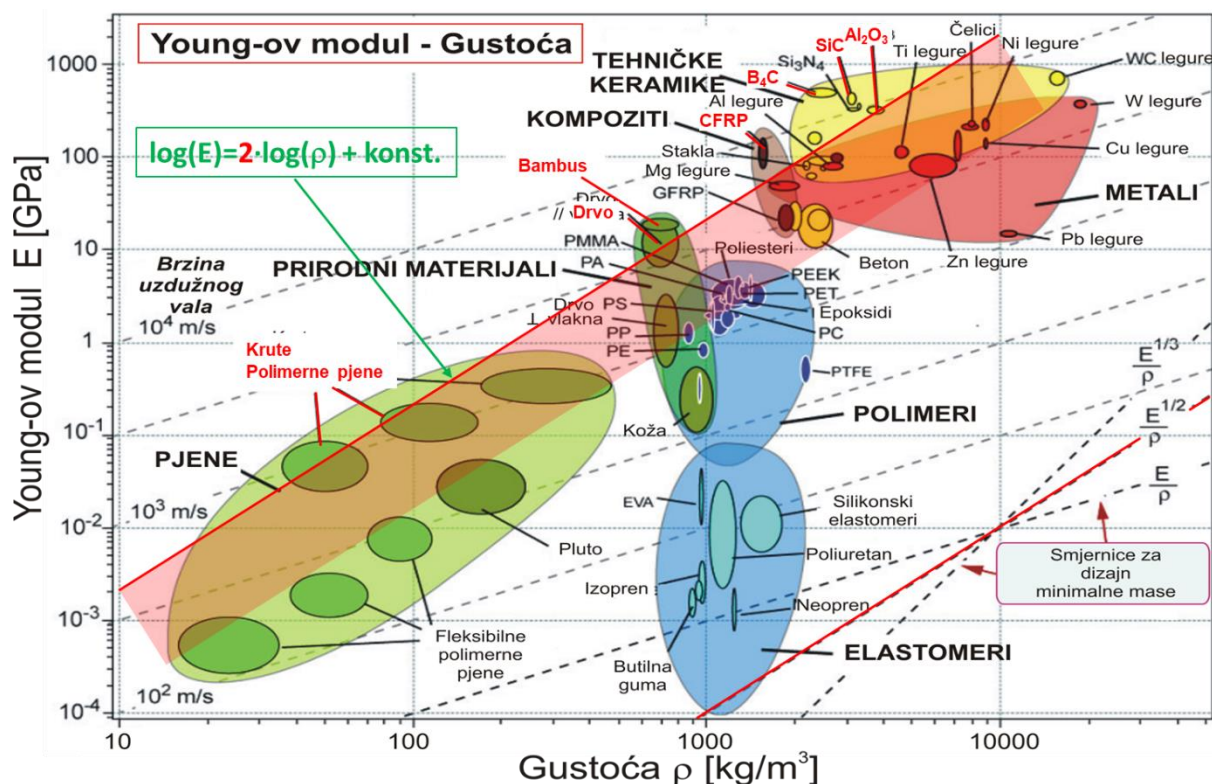
$$\log(M) = \log \left(\frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho} \right) \Rightarrow \log(E) = 2 \cdot \log(\rho) + 2 \cdot \log(M)$$

Logaritmiranjem dobiveni izraz je jednadžba pravca s nagibom „2” i odsječkom „ $2 \cdot \log(M)$ ” u dijagramu „ $\log \rho - \log E$ ”.

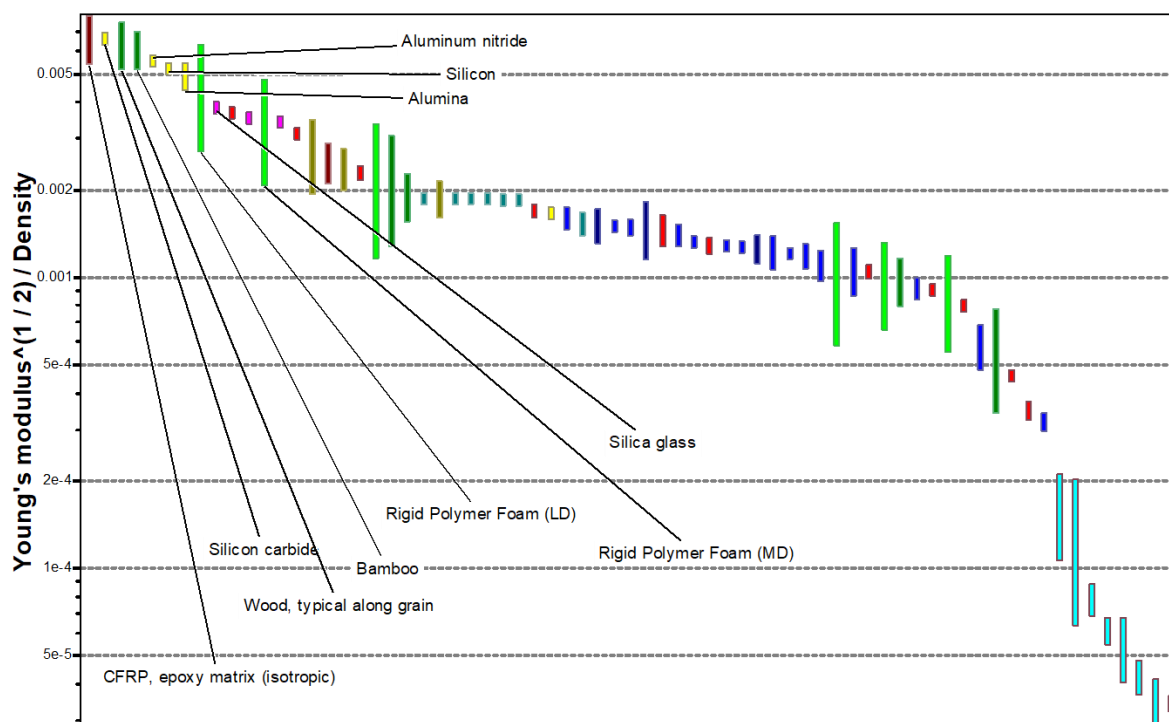
Paralelnim pomicanjem pravca prema lijevom gornjem kutu dijagrama izoliraju se materijali s najvišim vrijednostima indeksa materijala M , dakle one čijim korištenjem se može izraditi najlaganije veslo.

U ovom slučaju najbolji materijali za odabir su prikazani tablično, a u dijagramu na slici 2.6 su istaknuti crvenom bojom. Na slici 2.7 prikazan je trakasti dijagram s prikazanim materijalima poredanim prema indeksima materijala.

U tablici 2.4 navedeni su materijali s najvišim indeksima iz raspoložive baze podataka.



Slika 2.6 Dijagram svojstava materijala „ $\log \rho - \log E$ ”



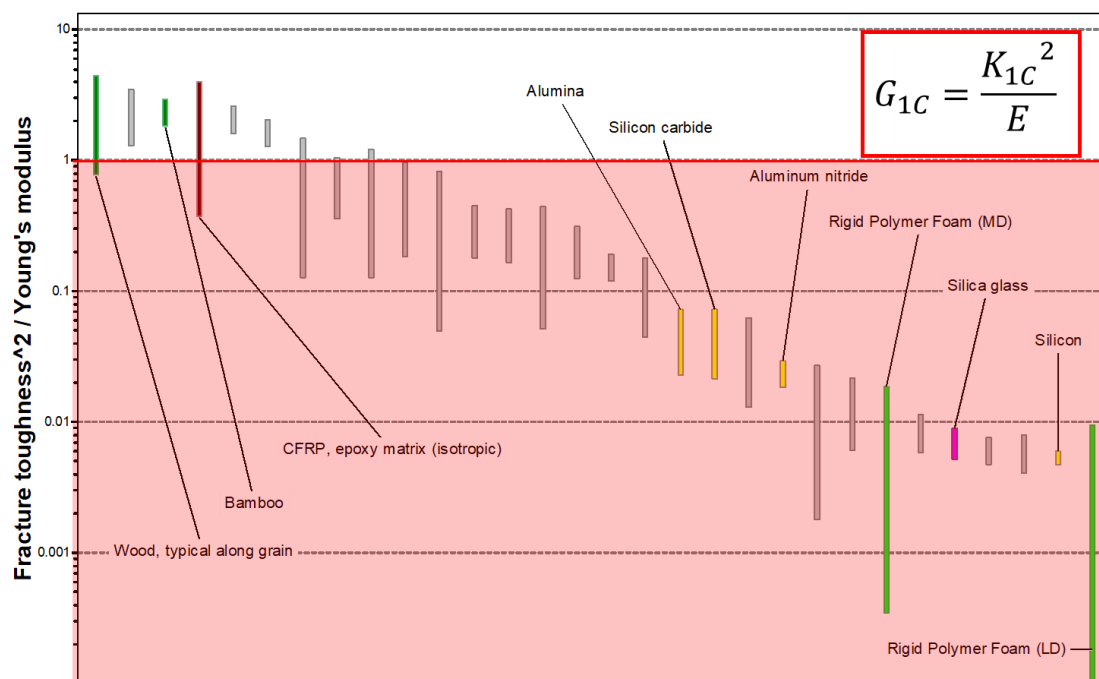
Slika 2.7 Trakasti dijagram s indeksima materijala $M = \left(\frac{E^{1/2}}{\rho} \right)$

Tablica 2.4 Materijali s najvišim indeksima iz raspoložive baze podataka

Materijal	$M = \left(\frac{E^{1/2}}{\rho} \right)$ GPa ^{1/2} /(kg/m ³)	Komentar
Bambus	3,2 – 4,34	Tradicionalni materijal za vesla za kanue
Drvo	2,53 – 4,17	Jeftini, tradicionalni materijal neujednačene kvalitete
CFRP – polimer ojačan karbonskim vlaknima	2,6 – 3,43	Dobar poput drva, puno bolja kontrola svojstava
Keramike B ₄ C; SiC; Al ₂ O ₃ ; Al ₂ N; SiO ₂ ; Si	1,75 – 2,5	Dobar indeks materijala, ali slaba žilavost i visoka cijena
Krute polimerne pjene	2 – 10	Dobar indeks materijala, ali slaba žilavost

Najbolji materijali koji udovoljavaju postavljenim zahtjevima su bambus, drvo, CFRP i neke keramike.

Na kraju treba provjeriti dali nabrojani materijali zadovoljavaju uvjet da je radnja loma – udarna žilavost materijala $G_{1C} > 1 \text{ kJ/m}^2$. Primjena ograničenja udarne žilavosti prikazana je u trakastom dijagramu na slici 2.8. U dijagramu se udarna žilavost određuje korištenjem izraza $G_{1C} = \frac{K_{1C}^2}{E}$.



Slika 2.8 Primjena ograničenja udarne žilavosti u trakastom dijagramu

Materijali s najvišim vrijednostima indeksa materijala su „filtrirani“ prema njihovoj udarnoj žilavosti. Rekapitulacija je prikazana u tablici 2.5. Na temelju ograničenja žilavosti kao mogući izbor otpadaju keramike i krute polimerne pjene.

Tablica 2.5 Eliminacija najviše rangiranih materijala prema udarnoj žilavosti

Materijal	Lomna žilavost K_{1C} , $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$	E , GPa	Žilavost $G_{1C} = K_{1C}^2 / E$ KJ/m^2
Bambus	5 - 7	15 - 20	1,25 – 3,27
Drvo	5 - 9	6 - 20	2 – 8,5
CFRP	15 – 20	69 - 150	0,5 – 3,8
Keramike B_4C ; SiC ; Al_2O_3 ; Al_2N ; SiO_2	0,83 – 6,85	140 – 472	0,005 – 0,07
Krute polimerne pjene	0,0021 – 0,002	0,023 – 0,08	0,001 – 0,005

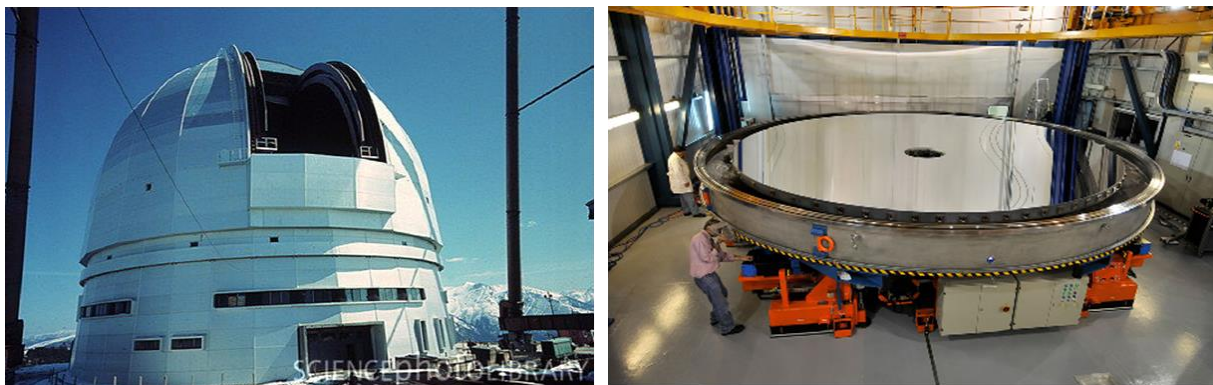
U praksi se koriste vesla za natjecanje izrađena iz drva ili kompozita CFRP (Carbon Fiber Reinforced Plastic). Korišteni dijagrami nisu ažurirani s podacima o najnovijim materijalima kojima se eventualno mogu dodatno povećati performanse tj. umanjiti masa vesla.

Svaki od materijala (kandidata za izbor) trebalo bi temeljito proučiti, kako s aspekta svojstava (mehaničkih i fizikalnih), tako i s aspekta ekonomičnosti.

2.1.2 Zadatak 2 - Izbor materijala za podlogu reflektora velikih teleskopa

Uvod

U svijetu postoji nekoliko vrlo velikih teleskopa. Najveći jednostavni teleskop se nalazi na planinama Kavkaza u Rusiji (slika 2.9 lijevo). Reflektor (ogledalo – slika 2.9 desno) je promjera 6 m i debljine 1 m (zbog krutosti). Teži 70 t.



Slika 2.9 Teleskop na Kavkazu u Rusiji

Ukupna cijena ovakvog teleskopa iznosi 300 mil. US\$. Sam reflektor (ogledalo) stoji oko 5% ukupne cijene. Ostatak cijene otpada na konstrukciju koja podržava reflektor, te uređaje za pozicioniranje i pokretanje teleskopa. Konstrukcija za podržavanje reflektora mora biti dovoljno kruta kako bi precizno pozicionirala ogledalo. Preciznost fokalne točke mora biti reda veličine valne duljine svjetla ($1\ \mu\text{m}$). Masa konstrukcije za podržavanje se povećava povećanjem površine reflektora – isto tako i cijena. Ranije su se reflektori za teleskope izrađivali iz legure s oko 2/3 bakra i 1/3 kositra – speculum metal (gustoće oko $8000\ \text{kg/m}^3$). Nakon toga se za izradu koristi staklo (gustoće $2300\ \text{kg/m}^3$) posrebrano s prednje strane. Staklo se koristi isključivo zbog svojih mehaničkih svojstava: 70 t stakla za podržavanje 100 nm (30 g) srebra.

Zadatak

Izvršiti odabir materijala za izradu podloge za podržavanje reflektirajuće površine za teleskop.

Zadano je:

- promjer ogledala $2 \times R = 6 \text{ m}$;
- maksimalan progib podloge ogledala uslijed vlastite težine $d < 1 \text{ } \mu\text{m}$.

Zahtjeva se visoka dimenzionalna stabilnost i što manje toplinsko širenje materijala.

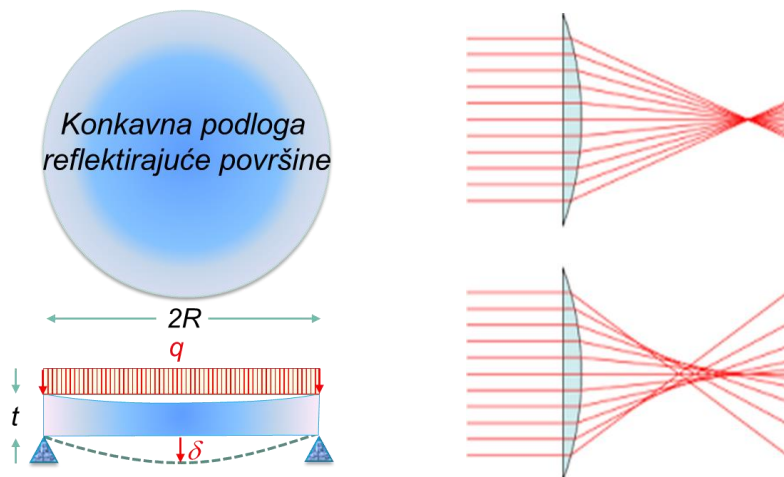
U tablici 2.6 prikazani su zahtjevi dizajna za izradu krute podloge reflektora promjera 6 m.

Tablica 2.6 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala krute podloge reflektora

Zahtjevi dizajna za podlogu reflektora	
FUNKCIJA	Precizna geometrija površine ogledala
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - radijus ogledala R - minimalno puzanje materijala - minimalno toplinsko širenje materijala Limitirajuća ograničenja - Nema ! Aktivno ograničenje - krutost (dopušteni progib ogledala $\delta_{dop} < 1 \text{ } \mu\text{m}$)
CILJ	Minimalna masa m podloge ogledala
SLOBODNE VARIJABLE	- Izbor materijala - Debljina stijenke podloge t

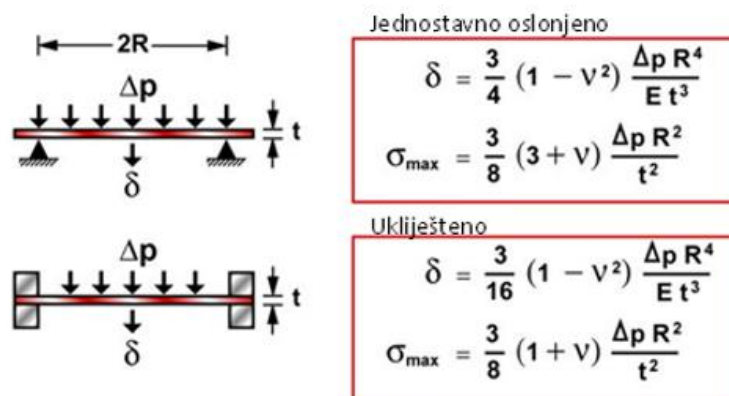
Najjednostavnije, podloga reflektora može se promatrati kao okrugli disk promjera $2R$ i debljine t jednostavno oslonjen po obodu (slika 2.10 lijevo). Kada je podloga horizontalno položena, deformirati će se uslijed vlastite težine (maksimalna deformacija), dok će deformacija u vertikalnom položaju biti neznatna.

Deformacija podloge mijenja udaljenost fokusa što dovodi do aberacije (pojave da se sve zrake svjetla, odbijene od reflektora, ne sastaju u fokusu – slika 2.10 desno). Zbog toga deformacija u središnjoj točki ogledala ne smije biti veća od valne duljine svjetla.



Slika 2.10 Pojednostavljena skica opterećenja podloge reflektora (lijevo), pojava aberacije uslijed deformacije podloge i gubitka fokusa svjetla (desno)

Elastična deformacija središnje točke ogledala uslijed vlastite težine podloge za horizontalni disk određena je prema priručniku (slika 2.11)!



Slika 2.11 Izvadak iz priručnika – progib i maksimalno naprezanje mirujućih diskova
Za kontinuirano opterećeni i jednostavno oslonjen disk progib je:

$$\delta = \frac{3}{4} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{\Delta p \cdot R^4}{E \cdot t^3} \quad (1)$$

gdje je:

$$\Delta p = \frac{m \cdot g}{R^2 \cdot \pi} = \frac{\rho \cdot R^2 \cdot \pi \cdot t \cdot g}{R^2 \cdot \pi} = \rho \cdot t \cdot g \quad (2)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) slijedi:

$$\delta = \frac{3}{4} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{\rho \cdot t \cdot g \cdot R^4}{E \cdot t^3}$$

$$\delta = \frac{3}{4} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot R^4}{E \cdot t^2}$$

Sređivanjem izraza u funkciji debljine stjenke t dobije se:

$$t = \left[\frac{3}{4} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot R^4}{\delta \cdot E} \right]^{1/2} \quad (3)$$

Poissonov koeficijent za većinu materijala iznosi oko 1/3 izuzev za elastomere 1/2 .

Masa podloge reflektora je:

$$m = \pi \cdot R^2 \cdot t \cdot \rho \quad (4)$$

Eliminacijom debljine stjenke t tj. uvrštavanjem izraza (3) u izraz (4):

$$m = \left[\left(\frac{3 \cdot g}{4 \cdot \delta} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 \right] \cdot [R^4] \cdot \left[\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{G}] \cdot [\mathbf{M}]$$

Iz jednadžbe cilja (5) vidljivo je da će masa diska biti minimalna ukoliko je veličina koja objedinjuje kombinaciju svojstava materijala minimalna, odnosno ako je njezina recipročna vrijednost – indeks materijala maksimalan:

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{E^{\frac{1}{3}} \rho} \right) \quad (6)$$

Za izbor materijala koristi se dijagram svojstava materijala u kojem je os apscisa gustoća ρ , kg/m³, a ordinata Young-ov modul elastičnosti E , GPa materijala (slika 2.12).

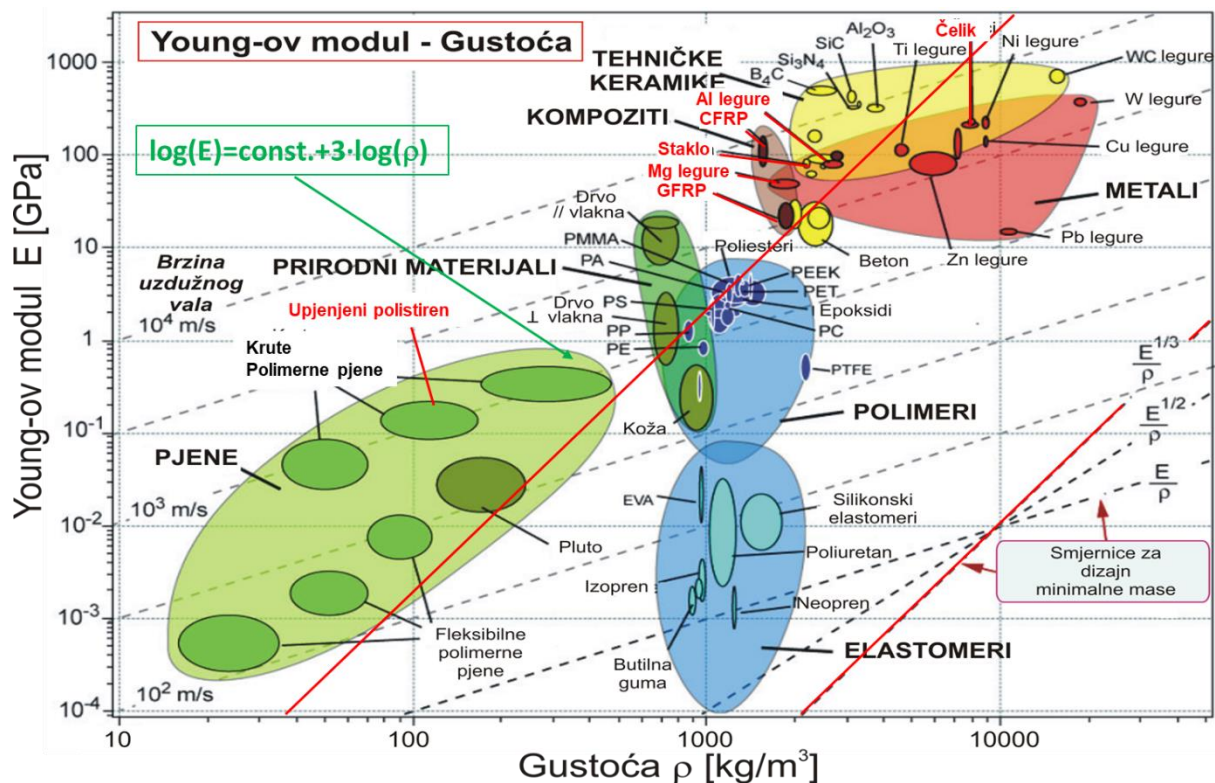
Kako se osi dijagrama materijala prikazuju u logaritamskom mjerilu, izraz (6) se piše u logaritamskom obliku:

$$\log(M) = \log \left(\frac{1}{E^{\frac{1}{3}} \rho} \right) \Rightarrow \underbrace{\log(E)}_y = \underbrace{3}_{k} \cdot \underbrace{\log(\rho)}_y + \underbrace{3 \cdot \log(M)}_l$$

Dakle, nagib pravca (smjernice za izbor) u dijagramu svojstava materijala je pravac nagiba „3”.

Paralelnim pomicanjem pravca prema lijevom gornjem kutu dijagrama izoliraju se najučinkovitiji materijali (s najvišim vrijednostima indeksa materijala M - najlakše podloge za ogledalo).

Potencijalni materijali za odabir su prikazani u tablici 2.7, a u dijagramu su obilježeni crvenom bojom.



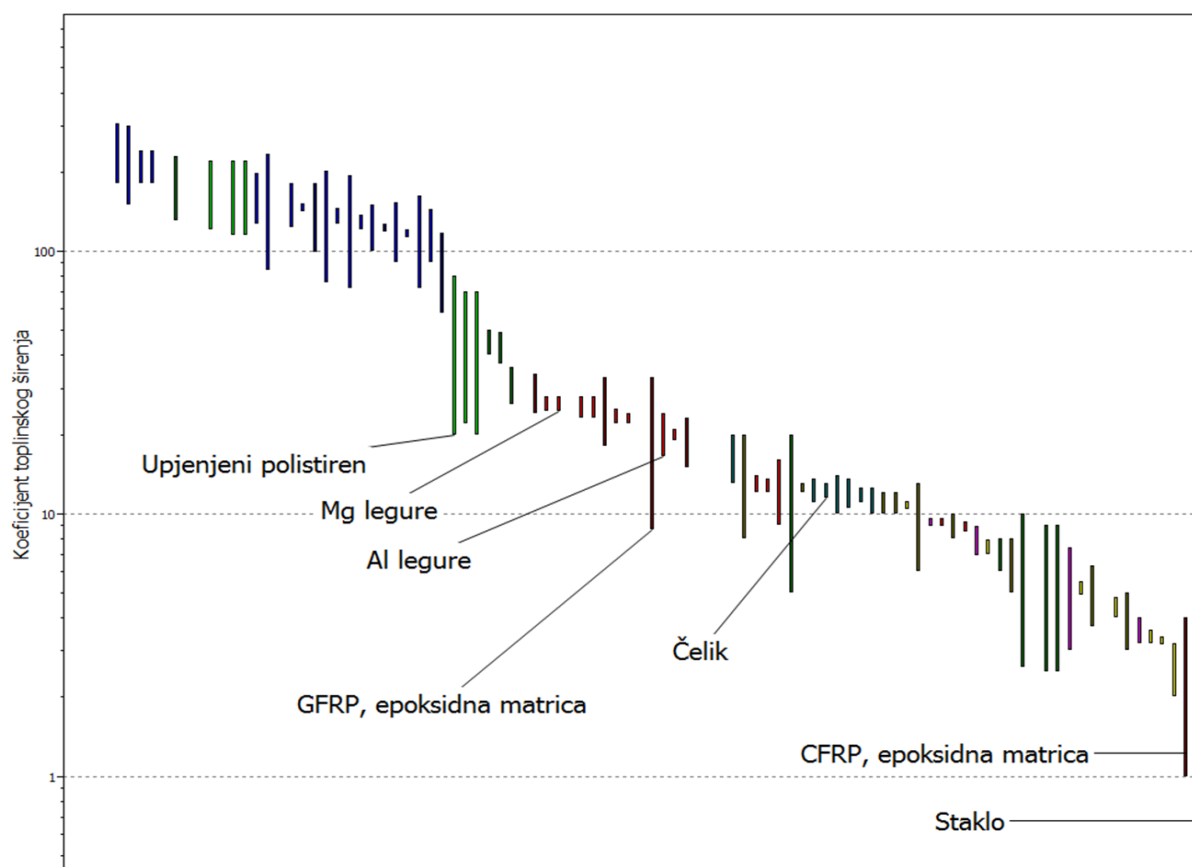
Slika 2.12 Dijagram svojstava materijala „ $\rho - E$ “

Materijali s većim indeksom bolje ispunjavaju cilj – minimalnu masu podloge. Danas se najčešće upotrebljavaju stakla s indeksom materijala $M=0,0017$. Stakla imaju znatno bolja svojstva od čelika za ovu svrhu.

Staklo je lošije od magnezijevih legura, više keramika, polimera ojačanih staklenim ili karbonskim vlaknima (GFRP, CFRP) ili što je neočekivano upjenjenih polimera.

Tablica 2.7 Najviše rangirani materijalu za izradu krute lake podloge teleskopa

Materijal	$M = E^{1/3}/r$	masa m , kg	Komentar
Čelik	0,00074	232743	Vrlo teška konstrukcija – izvorni odabir
GFRP	0,0015	80638	Nedovoljna stabilnost dimenzija materijala
Al - legure	0,0016	73048	Teže od stakla – visok koeficijent toplinskog širenja
Staklo	0,0017	68305	Danas se koristi
Mg - legure	0,0019	56604	Lakši od stakla – visok koeficijent toplinskog širenja
CFRP	0,003	28460	Vrlo lagan, nestabilne dimenzije – koristi se za radio teleskope
Upjenjeni polistiren	0,0045	15811	Najlakši, nestabilne dimenzije



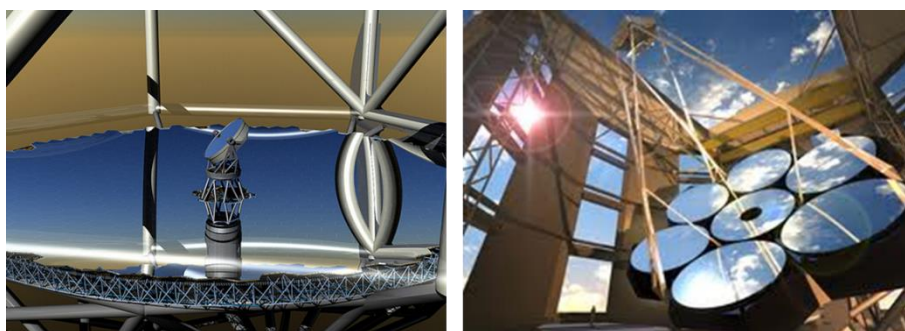
Slika 2.13 Trakasti dijagram s materijalima poredanim prema koeficijentu toplinskog širenja

Jasno, mogli bi se istražiti i drugi aspekti odabira. Masa ogledala, prema jednadžbi 1.3, za CFRP je više nego dvostruko manja od stakla. Dakle, potporna konstrukcija će zbog toga biti više nego četiri puta jeftinija. Upotrebom upjenjenih polimera ušteda bi mogla biti i veća. Izbor polistirena ili CFRP naizgled je nepraktičan (zbog problema izrade).

Međutim potencijalna ušteda (16X) je ogromna, pa je vrijedno istraživanje mogućnosti primjene ovih materijala. Postoji način nanošenja tankog filma silikonske gume ili epoksidne smole na podlogu ogledala (polistiren ili CFRP) koji daje glatku podlogu koja se može posrebiti. Najveći problem je nedostatak stabilnosti polimera (mijenjaju dimenzije uslijed starenja, promjena temperature, vlage ... slika 2.13).

Staklo bi moglo biti ojačano karbonskim vlaknima. Upjenjavanjem stakla mogao bi se dobiti materijal znatno lakši od punog stakla. Staklo ojačano karbonskim vlaknima i staklena pjena imaju kemijsku i dimenzijsku stabilnost kao i puno staklo, pa je ovo možda orijentacija za daljnja istraživanja.

Zahtjev na krutost ($\delta = 1 \text{ mm}$) mogao bi se djelomično prevladati bez pojačanja podloge. Teleskopi na Manua Kea na Havaima i Cerro Paranal Silla u Čileu imaju tanko ogledalo reflektora podržano mrežom hidrauličkih ili piezo-električkih dizalica koje vrše raspodjelu sila na stražnjoj plohi ogledala - slika 2.14 lijevo. Teleskop u Manua Kea je segmentiran tako da se svaki segment neovisno pozicionira kako bi se dobio optički fokus – slika 2.14 desno. Ograničenje ovakvog pristupa je još uvijek da ogledalo mora imati potrebnu krutost. Dokle god je krutost uz minimalnu masu zahtjev dizajna, kriterij izbora materijala ostaje nepromijenjen.



Slika 2.14 Ogledalo reflektora podržano hidrauličkim dizalicama (lijevo); segmentirani reflektor teleskopa (desno)

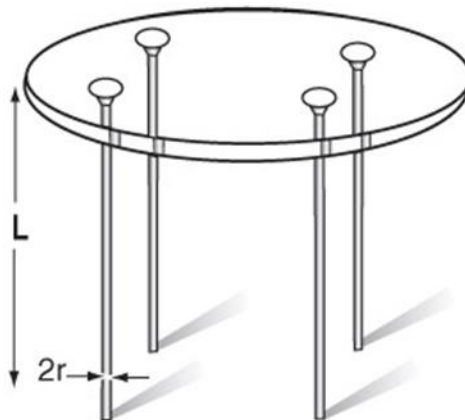
Kod radio teleskopa nije potrebna ovolika preciznost (zbog veće valne duljine radiovalova – oko 0,25 mm), ali njihove dimenzije su znatno veće (promjera oko 60 m). Radio teleskopi se danas rutinski izrađuju iz CFRP. Na Tokijskom sveučilištu je izrađen radio teleskop s

paraboličnim reflektorom promjera 45 m koji se sastoji od 6000 CFRP panela upravljanih servo motorima zbog kompenzacije makrodistorzije.

2.1.3 Zadatak 3 - Izbor materijala za vitke i lagane nogice stolića

Uvod

Talijanski dizajner namještaja, Luigi Tavolino, projektirao je jednostavni okrugli stolić (slika 2.15) koji se sastoji od okrugle ploče na vitkim cilindričnim nogicama. Nogice moraju biti punog presjeka (kako bi bile što tanje), te što laganije.



Slika 2.15 Jednostavni okrugli stolić

Zadatak

Nogice moraju podržavati masu staklene ploče i svega što se stavi na stolić bez pojave izvijanja. Ukoliko dođe do slučajnog udarca u nogicu stolića ne smije doći do loma. Koji bi materijal preporučili za njihovu izradu?

U ovom problemu su sadržana dva cilja:

- minimalna masa i
- maksimalna vitkost.

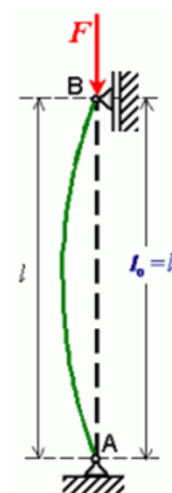
Problem sadrži i dva ograničenja:

- otpornost na izvijanje i

- dovoljna žilavost materijala kako ne bi došlo do loma (prema iskustvu mora biti $G_{IC} > 1 \text{ kJ/m}^2$).

Nogice se mogu promatrati kao vitki stupići materijala gustoće ρ i modula elastičnosti E . Njihova je duljina L , a maksimalno opterećenje nogice je F . Radijus nogice R je slobodna varijabla. Pojednostavljena skica opterećenja nogice stolića prikazana je na slici desno.

Tablica 2.8 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala nogice stolića



Zahtjevi dizajna za nogice stolića	
FUNKCIJA	Stup (podržava tlačno opterećenje)
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina nogice stolića L Limitirajuća ograničenja - Ne smije doći do loma uslijed slučajnog udarca $G_{IC} > 1 \text{ kJ/m}^2$ Aktivno ograničenje - Ne smije doći do izvijanja pod projektnim opterećenjem
CILJ	- Minimalna masa nogice - m - Maksimalna vitkost - R
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Radijus nogice R (u slučaju cilja minimalne mase)

Kritična sila F_{krit} za elastično izvijanje prema Euleru određuje se iz jednadžbe dane u priručniku (slika 2.16).

$$F_{krit} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L^2} \quad (1)$$

Za okrugli presjek minimalni aksijalni moment inercije (određen prema priručniku s korisnim rješenjima) je:

$$I_{min} = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad (2)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1):

$$F_{krit} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot R^4}{4 \cdot L^2} > F$$

Kako je radijus R slobodna varijabla gornji izraz treba urediti na način kako slijedi:

$$R > \left(\frac{4 \cdot F \cdot L^2}{\pi^3 \cdot E} \right)^{1/4} \quad (3)$$

Obzirom da je cilj minimalizacija mase funkcija cilja je:

$$m = \pi \cdot R^2 \cdot L \cdot \rho \quad (4)$$

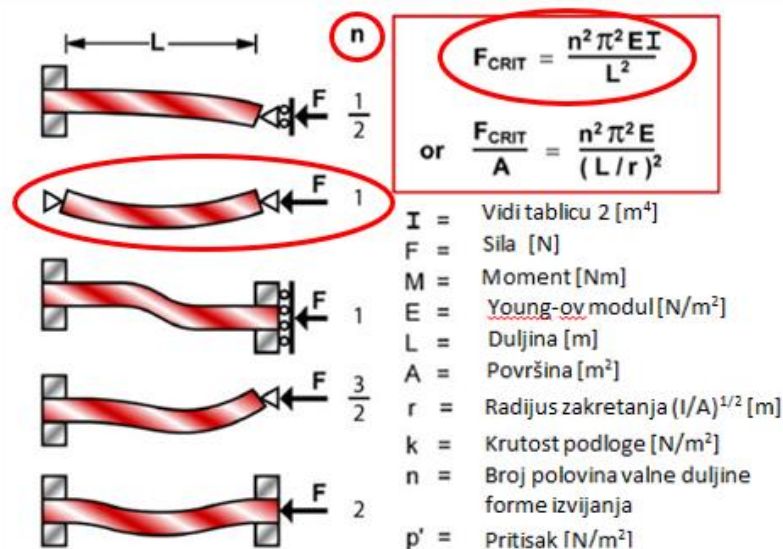
Eliminacijom slobodne varijable R , tj. uvrštavanjem izraza (3) u izraz (4) slijedi:

$$m \geq \left[\frac{4 \cdot F}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [L]^2 \cdot \left[\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{G}] \cdot [\mathbf{M}]$$

Iz izraza za funkciju cilja (5) vidljivo je da će masa nogica stolića biti minimalna ukoliko je izraz koji povezuje svojstva materijala $\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}}$ minimalan, odnosno ako je njegova recipročna vrijednost tj. indeks materijala maksimalan:

$$M_1 = \left(\frac{1}{\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}}} \right)$$



Slika 2.16 Izvadak iz priručnika – kritične sile za elastično izvijanje

Drugi cilj je **maksimalizirati vitkost**. Ako se u jednadžbu (3) uvrsti $F = F_{krit}$ slijedi jednadžba za najtanju nogicu bez pojave izvijanja:

$$R \geq \left[\frac{4 \cdot F}{\pi^3} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot [L]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{E} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (6)$$

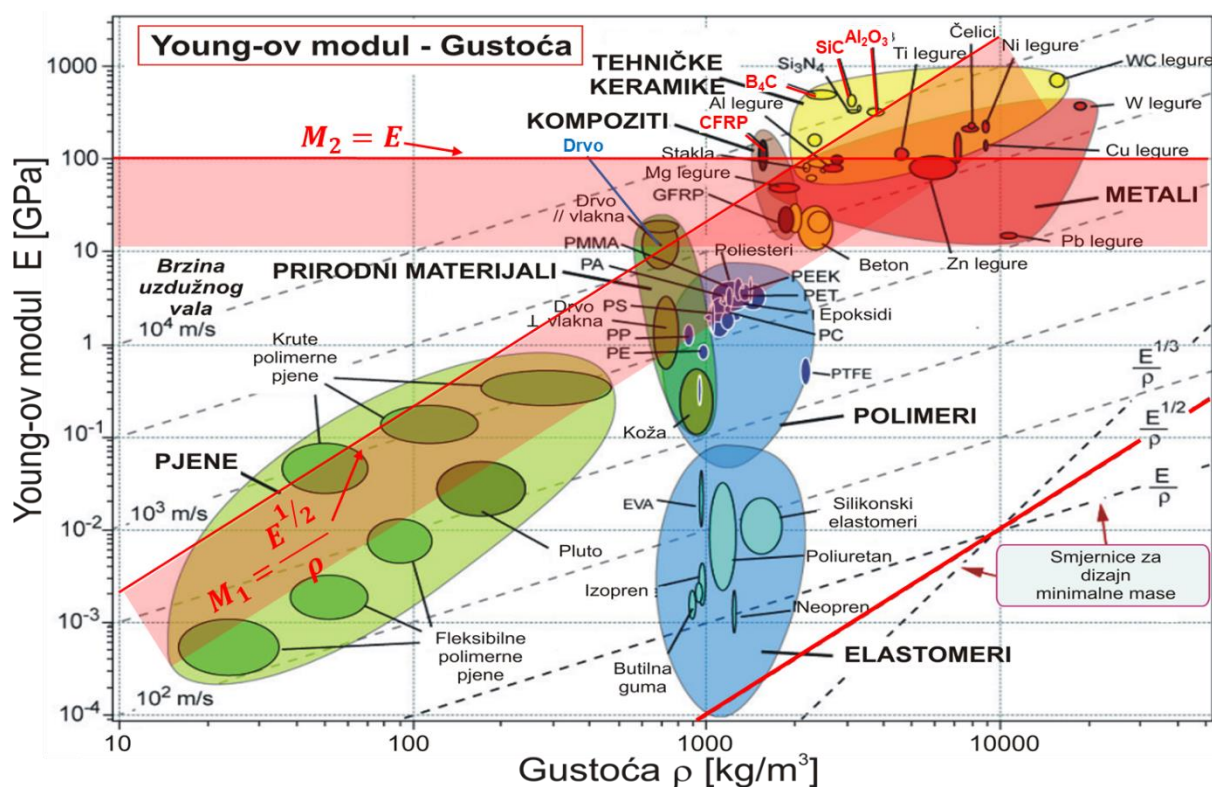
$$\mathbf{P} = [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{G}] \cdot [\mathbf{M}]$$

Iz izraz za performansu sustava (6) vidljivo je da će maksimalnu vitkost imati nogice stolića ukoliko je $(1/E)$ minimalna, odnosno ako je njezina recipročna vrijednost – indeks materijala maksimalan:

$$M_2 = E$$

Traži se grupa materijala koji imaju visoku vrijednost $\frac{1}{\rho} \cdot E$ i E .

Za izbor materijala poslužiti će dijagram svojstava materijala u kojem je os apscisa gustoća ρ , kg/m^3 , a ordinata Youngov modul elastičnosti E , GPa materijala (slika 2.17).

Slika 2.17 Dijagram svojstava materijala „ $\rho - E$ “

Visokorangirani materijali s odgovarajućim indeksima $M_1 = \left(\frac{E^2}{\rho}\right)$ i $M_2 = E$ prikazani su u tablici 2.9. Za svaki od materijala navedeni su komentari tj. njihove dobre i loše strane

Tablica 2.9 Najviše rangirani materijali za krute i vitke nogice stolića

Materijal	$M_1 = E^{1/2}/\rho$	$M_2 = E$	Komentar
GFRP	0,0025	20	Jeftinije od CFRP, ali niže vrijednosti M_1 i M_2
Drvo	0,0045	10	Visoki M_1 , ali loš M_2
Keramike	0,0063	300	Visoki M_1 i M_2 , eliminirane zbog krhkosti
CFRP	0,0066	100	Visoki M_1 i M_2 , skupa izvedba

Upotreba cijevi (šupljih presjeka) umjesto punog profila bi dala manju masu nogica, ali bi se istovremeno povećao njihov promjer (smanjila bi se vitkost). Dakle, u ovom slučaju postoje dva cilja koji su u međusobnom sukobu tako da će rješenje predstavljati kompromis između mase i vitkosti. Keramike su izuzete iz razmatranja zbog krhkosti. Problem krhkosti bi mogli otkloniti zaštitom nogica od mogućih udaraca.

2.1.4 Zadatak 4 - Trošak konstrukcijskih materijala za gradnju stambenih objekata

Uvod

Najskuplji artikl kojeg većina ljudi u životu kupi je kuća u kojoj žive. Pola cijene koju plate otpada na trošak materijala. Ukupan prosječan utrošak materijala za obiteljsku kuću je reda veličine 200 000 kg.

Materijali koji se koriste za izgradnju se mogu podijeliti u tri grupe:

- nosivi konstrukcijski materijali građevine,
- materijal za ispunu između nosive konstrukcije,
- materijali za toplinsku i zvučnu izolaciju te dekoraciju.

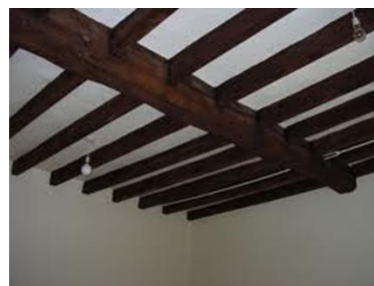
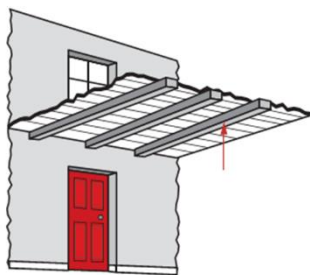
U konkretnom zadatku razmatraju se nosivi konstrukcijski materijali koji moraju biti:

- kruti (kako se građevina ne bi previše gibala uslijed vjetrova i unutarnjih opterećenja),
- čvrsti (kako ne bi došlo do rušenja građevine) i
- jeftini (jer je utrošak materijala velik)

Konstrukcija je rijetko izložena utjecaju okoline i u pravilu nije vidljiva, pa otpornost na koroziju i dekorativni kriterij nemaju važnost kod izbora materijala.

Zadatak

U ovom zadatku odabire se materijal za gredu koja nosi podnu konstrukciju u građevini (slika 2.18). Cilj je jednostavan: čvrstoća i krutost uz minimalnu cijenu materijala.



Slika 2.18 Podna konstrukcija stambenog objekta

U tablici 2.10 prikazani su zahtjevi dizajna za izradu lakog sportskog vesla. Uz dva aktivna ograničenja za izbor materijala podne grede dodano je i limitirajuće ograničenje na lomnu žilavost materijala kako, u slučaju pojave pukotine koja se može pojaviti u okviru samog proizvodnog postupka, ne bi došlo do katastrofe.

Tablica 2.10 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala nogice stolića

Zahtjevi dizajna za nosivu podnu gredu	
FUNKCIJA	Lagana podna greda
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina grede L Limitirajuća ograničenja - Materijal grede mora imati određenu otpornost na oštre koncentratore naprezanja, pa lomna žilavost mora biti $K_{IC} > 20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ Aktivno ograničenje - Krutost – ne smije doći do prevelikog progiba pod projektnim opterećenjem $\delta < \delta_{dop}$ - Čvrstoća – ne smije doći do loma pod opterećenjem $\sigma_{max} < \sigma_{dop}$
CILJ	- Minimalni trošak materijala - C
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Površina poprečnog presjeka grede A

Nosive grede su opterećene na savijanje. Cijena grede je u funkciji njezine mase pa je:

$$C = m \cdot C_m = A \cdot L \cdot \rho \cdot C_m \quad (1)$$

1. Indeks materijala za jeftinu podnu gredu uz aktivno ograničenje krutosti

Prema priručniku (slika 2.19) krutost grede opterećene na savijanje je:

$$S = \frac{F}{\delta} \geq \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (2)$$

Ako se usvoji da je greda pravokutnog presjeka $b \times d$, tada je faktor oblika grede $\alpha = \frac{d}{b}$ pa slijedi:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{\alpha \cdot A^2}{12} \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (3) u izraz (2):

$$S \geq \frac{C_1 \cdot E \cdot \alpha \cdot A^2}{12 \cdot L^3} \quad (4)$$

Izraz (4) se može prikazati u funkciji slobodne varijable A :

$$A \geq \left(\frac{12 \cdot L^3 \cdot S}{C_1 \cdot \alpha \cdot E} \right)^{1/2} \quad (4)$$

Eliminacijom slobodne varijable (površina poprečnog presjeka A) tj. uvrštavanjem izraza (4) u izraz (1) slijedi:

$$C = \left(\frac{12 \cdot S}{\alpha \cdot C_1} \right)^{1/2} \cdot (L)^{5/2} \cdot \left(\frac{C_m \cdot \rho}{E^2} \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{G}] \cdot [\mathbf{M}]$$

Iz izraza za performanse sustava (5) slijedi indeks materijala M_1 čijom maksimalizacijom se dobivaju najjeftiniji materijali za podnu gredu:

$$M_1 = \left(\frac{E^2}{\rho \cdot C_m} \right) \quad (6)$$

3. ELASTIČNO SAVIJANJE GREDE

Kada je greda opterećena silom F ili momentom M , početna ravna os se deformira u krivulju. Ako greda ima jedinstveni presjek i svojstva, te ima veliki omjer duljine prema visini grede te nije ni u kom dijelu napregnuta iznad granice elastičnosti, progib d i kut rotacije θ , se mogu izračunati pomoću teorije elastične linije. Osnovna diferencijalna jednačba opisuje zakrivljenost grede u točki x po cijeloj duljini

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

gdje je y progib bočni otklon, a M moment savijanja u točki x . E je Young-ov modul elastičnosti, a I je moment inercije presjeka. Kada je M konstantan, jednačba elastične linije postaje:

$$\frac{M}{I} = E \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

gdje je R_0 radijus zakrivljenosti prije djelovanja momenta, a R radijus zakrivljenosti za vrijeme djelovanja momenta. Progibi d i rotacije θ pronalaze se integriranjem tih jednačbi uzduž grede. Krutost grede je definirana sa:

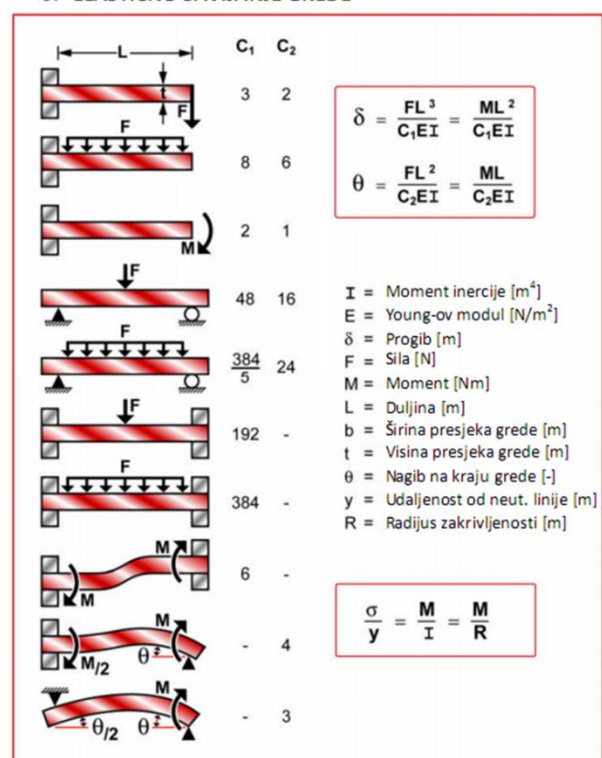
$$S = \frac{F}{\delta} = \frac{C_1 EI}{L^3}$$

Krutost ovisi o Young-ovom modulu E za materijal grede, duljini grede L i o momentu inercije presjeka I . Nagib na kraju grede θ je dan sa

$$\theta = \frac{FL^2}{C_2 EI}$$

Jednačbe za progibe d , i nagiba krajeva grede θ za razne uobičajene vrste opterećenja prikazani su na slijedećoj stranici, zajedno s vrijednostima za C_1 i C_2 .

3. ELASTIČNO SAVIJANJE GREDE



Slika 2.19 Priručnik s korisnim rješenjima – elastično savijanje grede

2. Indeks materijala za jeftinu podnu gredu uz aktivno ograničenje čvrstoće

Prema priručniku (slika 2.20) za gredu opterećenu na savijanje njezina čvrstoća je:

$$F_f = C \cdot \left(\frac{I}{y_m}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_f}{L}\right) \rightarrow F_f = C \cdot W_y \cdot \left(\frac{\sigma_f}{L}\right) \quad (7)$$

gdje je:

y_m - udaljenost od neutralne linije do najudaljenije plohe profila

C - konstanta ovisna o geometriji i rubnim uvjetima

σ_f – naprezanje pri kojem dolazi do oštećenja materijala (lom kod krutih ili plastična deformacija kod rastezljivih materijala)

I – moment inercije presjeka

U izrazu (7) kvocijent $\frac{F_f \cdot L}{C}$ predstavlja vrijednost maksimalnog momenta savijanja grede.

Aksijalni moment otpora za pravokutni presjek grede je:

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (8)$$

Omjer visine prema širini presjeka označen je koeficijentom α :

$$\alpha = \frac{h}{b} \rightarrow h = \alpha \cdot b \quad (9)$$

Kombinacijom izraza (8) i (9) dobije se:

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot h^{3/2} \cdot h^{1/2}}{6} = \frac{b \cdot h^{3/2} \cdot (\alpha \cdot b)^{1/2}}{6} = \frac{A^{3/2} \cdot \alpha^{1/2}}{6} \quad (10)$$

Uvrštavanjem izraza (8) u izraz (7) slijedi:

$$F_f = C \cdot \left(\frac{A^{3/2} \cdot \alpha^{1/2}}{6}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_f}{L}\right) \quad (11)$$

Izraz (11) prikazan u funkciji slobodne varijable A je:

$$A = \left(\frac{6 \cdot F_f}{C \cdot \sqrt{\alpha}}\right)^{2/3} \cdot L^{2/3} \cdot \frac{1}{\sigma_f^{2/3}} \quad (12)$$

Konačno, eliminacijom slobodne varijable, uvrštavanjem izraza (12) u izraz za funkciju cilja (1), dobije se funkcija cilja uz aktivno ograničenje čvrstoće materijala:

$$C = \left(\frac{6}{C} \cdot \frac{F_f}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(L^{5/3} \right) \cdot \left(\frac{\rho \cdot C_m}{\sigma_f^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (13)$$

Recipročna vrijednost zadnjeg člana u funkciji cilja (13) jest indeks za izbor materijala primjenom dijagrama svojstava materijala:

$$M_2 = \left(\frac{\sigma_f^{\frac{2}{3}}}{\rho \cdot C_m} \right) \quad (14)$$

Dakle, traži grupa materijala koja ima visoke vrijednosti indeksa M_1 i M_2 . Obzirom na fluktuaciju cijena materijala na tržištu uobičajeno je da se koristi relativna cijena materijala. Najčešće se cijena uspoređuje s cijenom čelika.

Za odabir materijala koriste se dva dijagrama svojstava materijala:

1. dijagram u kojem je os apscisa relativna cijena po jedinici volumena materijala $\rho \cdot \frac{C_m}{(\rho \cdot C_m)_{\check{c}}}$ nelegiranog čelika, a ordinata Youngov modul elastičnosti E , GPa (slika 2.21);
2. dijagram u kojem je os apscisa relativna cijena po jedinici volumena materijala $\rho \cdot \frac{C_m}{(\rho \cdot C_m)_{\check{c}}}$ nelegiranog čelika, a ordinata čvrstoća materijala σ_f , MPa (slika 2.22).

Kako su osi dijagrama prikazane u logaritamskom mjerilu, indeksi materijala M_1 i M_2 se izražavaju u logaritamskom obliku:

$$\text{Log}(M_1) = \log \left(\frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho \cdot \frac{C_m}{(\rho \cdot C_m)_{\check{c}}}} \right) \quad (15)$$

Sređivanjem izraza (15) u formi jednadžbe pravca:

$$\text{Log}(E) = 2 \cdot \log \left[\frac{(\rho \cdot C_m)}{(\rho \cdot C_m)_{\check{c}}} \right] + 2 \cdot \log(M_1) \quad (16)$$

Slijedi da pravac ima nagib „2” u dijagramu svojstava materijala.

4. LOM GREDA I PLOČA

Uzdugo naprezanje σ u točki y od neutralne osi grede jednolikog presjeka, elastično opterećene na savijanje momentom M je:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} E \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$$

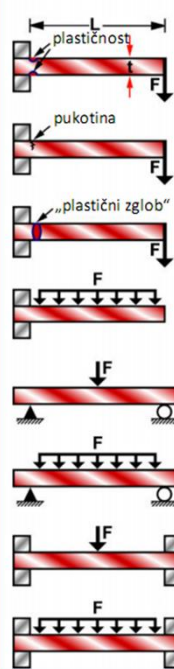
gdje je I moment inercije presjeka, E Young-ov modul elastičnosti, R_0 je polumjer zakrivljenosti prije djelovanja momenta i R je radijus nakon opterećenja grede momentom. Vlačno naprezanje u vanjskim vlaknima takve grede je

$$\sigma = \frac{M y_m}{I} = \frac{M}{Z}$$

gdje je y_m je okomita udaljenost od neutralne osi do vanjske površine grede, a $Z = I/y_m$ je moment otpora. Ako ovo naprezanje dosegne granicu tečenja σ_f materijala grede pojavljuje se mala zona plastične deformacije na površini (prva slika na susjednoj strani). Greda više nije elastično opterećena, i na neki način je „zatajila“. Ako, umjesto toga, maksimalno naprezanja dosegne čvrstoću krhkog loma σ_f (modul loma, skraćeno MOR) materijala grede, pukotina nastaje na površini, te se širi prema unutrašnjosti (druga slika).

Momenti i sile koji dovode do loma, za svaki od tri opisana tipa loma, i svaki od više slučajeva opterećenja, su dani na susjednoj stranici. Formule označene sa „inicijalna def.“ se odnose na prva dva moda loma, a „puna plastičnost“ na treći mod. U formulama za „puna plastična def.“ uključena je nova veličina H čije se vrijednosti mogu pronaći u tablici u Odjeljku 2.

4. LOM GREDA I PLOČA



C

1

1

1

1

2

4

8

8

16

$$M_f = \left(\frac{I}{y_m} \right) \sigma^* \quad \text{inicijalna def.}$$

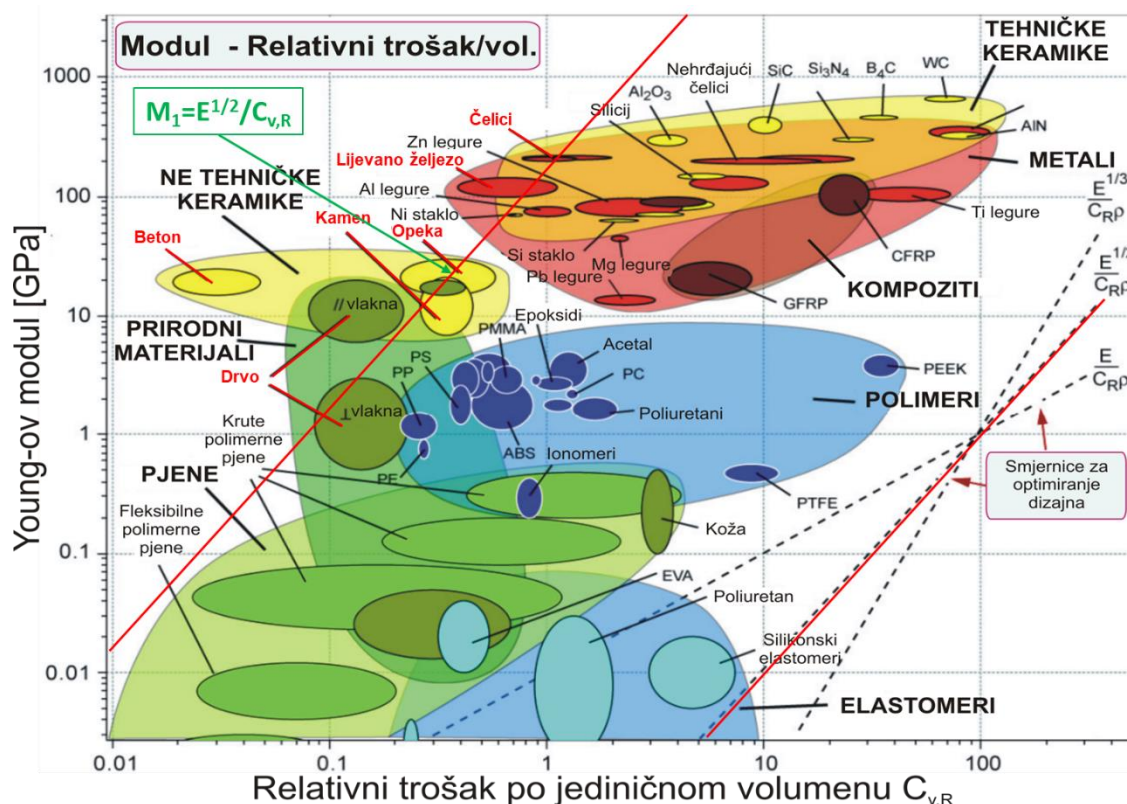
$$M_f = H \sigma_y \quad \text{puna plastična def.}$$

$$F_f = c \left(\frac{I}{y_m} \right) \frac{\sigma^*}{L} \quad \text{inicijalna def.}$$

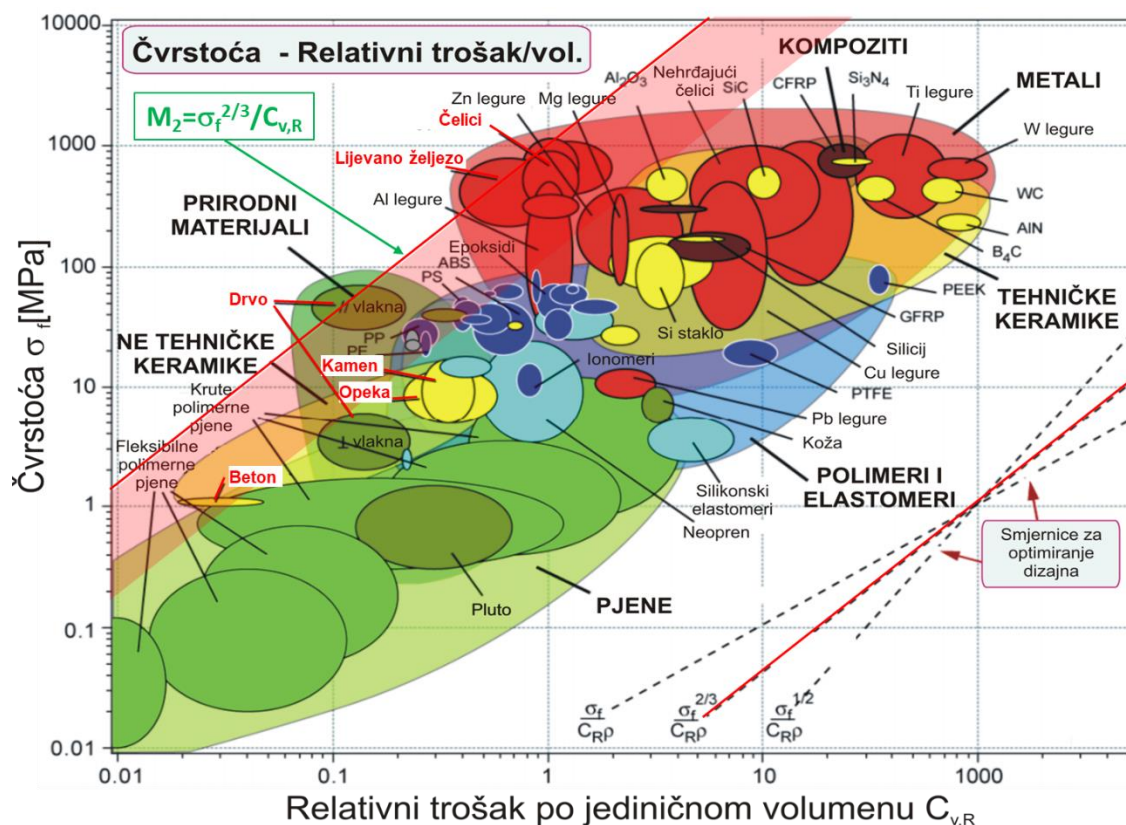
$$F_f = \frac{CH \sigma_y}{L} \quad \text{puna plastična def.}$$

M_f	=	Moment loma [Nm]
F_f	=	Sila kod loma [N]
L	=	Duljina [m]
t	=	Visina [m]
b	=	Širina [m]
I	=	Vidi tablicu 2 [m ⁴]
$\frac{I}{y_m}$	=	Vidi tablicu 2 [m ³]
H	=	Vidi tablicu 2 [m ³]
σ_y	=	Granica plastičnosti [N/m ²]
σ_f	=	Modul loma [N/m ²]
σ^*	=	σ_y (plastični materijali)
	=	σ_y (krhki materijali)

Slika 2.20 Priručnik s korisnim rješenjima – oštećenje pri savijanju grede i ploča



Slika 2.21 Dijagram svojstava materijala " $\rho \cdot \frac{C_m}{(\rho \cdot C_m)^{1/3}} - E$ " za izbor jeftine grede ograničene krutošću materijala



Slika 2.22 Dijagram svojstava materijala " $\rho \cdot \frac{c_m}{(\rho \cdot c_m)_\zeta} - \sigma_f$ " za izbor jeftine grede ograničene čvrstoćom materijala

U tablici 2.11 su prikazane vrijednosti indeksa materijala za izbor materijala jeftine grede za ograničenje krutosti i ograničenje čvrstoće.

Tablica 2.11 Indeksi materijala za izbor jeftine grede ograničene krutošću i čvrstoćom

Materijal	M_1 $\left(\frac{1}{\rho \cdot \frac{c_m}{\rho_\zeta} \cdot c_{m,\zeta}} \right)$	M_2 $\left(\frac{\sigma_f^{2/3}}{\rho \cdot \frac{c_m}{\rho_\zeta} \cdot c_{m,\zeta}} \right)$	Komentar
Beton	190	50	Podnosi samo tlačna opterećenja.
Opeka	13	22,6	Podnosi samo tlačna opterećenja.
Kamen	26	34	Podnosi samo tlačna opterećenja.
Drvo	29	650	Podnosi vlačna i tlačna opterećenje.
Lijeivano željezo	13	315	Podnosi vlačna i tlačna opterećenje. Može imati različite oblike presjeka koji mu povećavaju performanse.
Čelik	14,7	450	Podnosi vlačna i tlačna opterećenje. Može imati različite oblike presjeka koji mu povećavaju performanse.

Beton, opeka i kamen podnose samo tlačna opterećenja. Ovi materijali smiju biti upotrijebljeni samo u slučaju tlačnih opterećenja (lukovi, stupovi). Drvo, čelik i armirani beton podnose i vlačna i tlačna opterećenja. Čeliku se dodatno mogu povećati performanse korištenjem učinkovitih oblika poprečnog presjeka (I profili, cijevi i sl.). Upotreba čelika daje mnogo više slobode

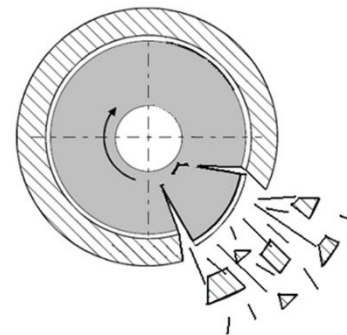
Ponekad se čini da današnji arhitekti žive u prošlosti. Zbog čega vrlo rijetko koriste materijali novijeg doba (nehrđajući čelici, GFRP, aluminijske i titan legure ...) ?

Trošak za postizanje iste krutosti korištenjem novih materijala je između 5 i 20 puta veći nego kod upotrebe tradicionalnih materijala. Kod građevinskih konstrukcija u troškovima dominira materijal, a količine koje se upotrebljavaju su ogromne. Iz ovog razloga samo najjeftiniji materijali dolaze u obzir.

2.1.5 Zadatak 5 – Izbor materijala učinkovitog zamašnjaka

Uvod

Namjena zamajca je pohrana energije. Mali zamajci kod dječjih igračaka se izrađuju iz olova, Kod starih parnih strojeva i automobila iz lijevanog željeza. U novije vrijeme zamajci se koriste i kod regenerativnog kočionog sustava - neki se izrađuju iz čelika povišene čvrstoće, a drugi iz kompozitnih materijala. Može se uočiti da se radi o materijalima bitno različitih svojstava. Koji je izbor najbolji? Učinkovitost zamašnjaka se ocjenjuje potencijalom pohranjivanja energije po jedinici mase. Povećanjem broja okretaja zamajca povećava se kutna brzina ω , a time i količina pohranjene energije. Ukoliko centrifugalna sila proizvede naprezanja koja prelaze čvrstoću materijala dolazi do loma zamašnjaka. Dopuštena naprezanja u zamašnjaku ograničavaju količinu energije (kinetičke) koja može biti pohranjena.



Zamašnjaci kod dječjih igračaka su ograničeni prostorom u kojem moraju biti smješteni. Kutna brzina zamajca kod igračaka je limitirana i nikad ne dostiže granicu kod koje dolazi do loma. Za slučaj zamašnjaka kod dječjih igračaka i za slučaj zamašnjaka u motoru automobila treba maksimalizirati količina pohranjene energije za zadanu kutnu brzinu ω zamašnjaka vanjskog promjera R - zamašnjak mora biti smješten u ograničeni prostor.

Ciljevi i ograničenja za dizajn zamašnjaka ovise o njegovoj primjeni.

Zadatak

Izvršiti izbor materijala za izradu:

- zamašnjaka za pohranjivanje energije
- zamašnjaka za dječje igračke

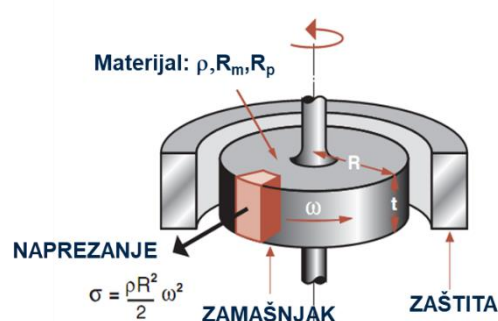
Rješenje

Zahtjevi dizajna sažeti su u tablici 2.12.

Tablica 2.12 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala za zamašnjak za pohranu energije

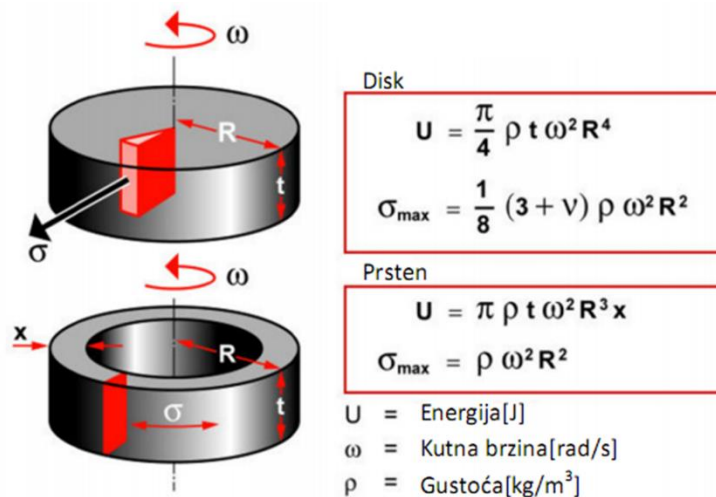
Zahtjevi dizajna za zamašnjak Kriterij: maksimalna pohranjena energija	
FUNKCIJA	Zamašnjak za pohranjivanje energije
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Vanjski promjer R Limitirajuća ograničenja - Odgovarajuća žilavost zbog smanjenja sklonosti širenja pukotina $K_{IC} > 20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ Aktivno ograničenje - Čvrstoća – ne smije doći do loma pod opterećenjem $\sigma_{max} < \sigma_{dop}$
CILJ	- Maksimalna kinetička energija po jedinici mase
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Kutna brzina ω

Učinkovit zamašnjak (bez ograničenja kutne brzine) mora spremati što više energije bez pojave loma. Zamašnjak se može promatrati kao disk punog presjeka radijusa R i debljine t koji rotira kutnom brzinom ω .



Pohranjena kinetička energija E_k u zamašnjaku računa se prema izrazu (slika Slika 2.23):

$$E_k = \frac{\pi}{4} \cdot \rho \cdot R^4 \cdot t \cdot \omega^2 \quad (1)$$



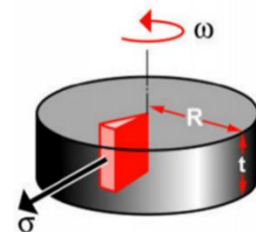
Slika 2.23 Izvadak iz priručnika s korisnim rješenjima za rotirajuće diskove i prstenove
Masa diska je:

$$m = \pi \cdot R^2 \cdot t \cdot \rho \quad (2)$$

Vrijednost koja se maksimizira je kinetička energija po jedinici mase:

$$\frac{E_k}{m} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \rho \cdot R^4 \cdot t \cdot \omega^2}{\pi \cdot R^2 \cdot t \cdot \rho} = \frac{1}{4} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \quad (3)$$

Povećanjem obodne brzine diska povećava se količina pohranjene energije, ali isto tako i naprezanje uslijed centrifugalne sile. Izraz za maksimalno naprezanje u materijalu rotirajućeg diska jednolike debljine presjeka se može pronaći u priručniku s gotovim rješenjima (slika 2.23):



$$\sigma_{\max} = \left(\frac{3+\nu}{8} \right) \cdot \rho \cdot R^2 \cdot \omega^2 \quad (4)$$

gdje je $\nu = 1/3$ Poisson-ov koeficijent.

Naprezanje ne smije preći vrijednost naprezanja pri kojem dolazi do oštećenja diska σ_f (odgovarajući faktor sigurnosti je ovdje izostavljen).

Ovim je postavljena gornja granica umnoška $\rho \cdot R^2 \cdot \omega^2$, gdje je R slobodna varijabla.

Eliminacijom $R^2 \cdot \omega^2$ iz izraza (3) i (4):

$$\frac{E_k}{m} = \frac{2}{3+\nu} \cdot \left(\frac{\sigma_f}{\rho} \right) \quad (5)$$

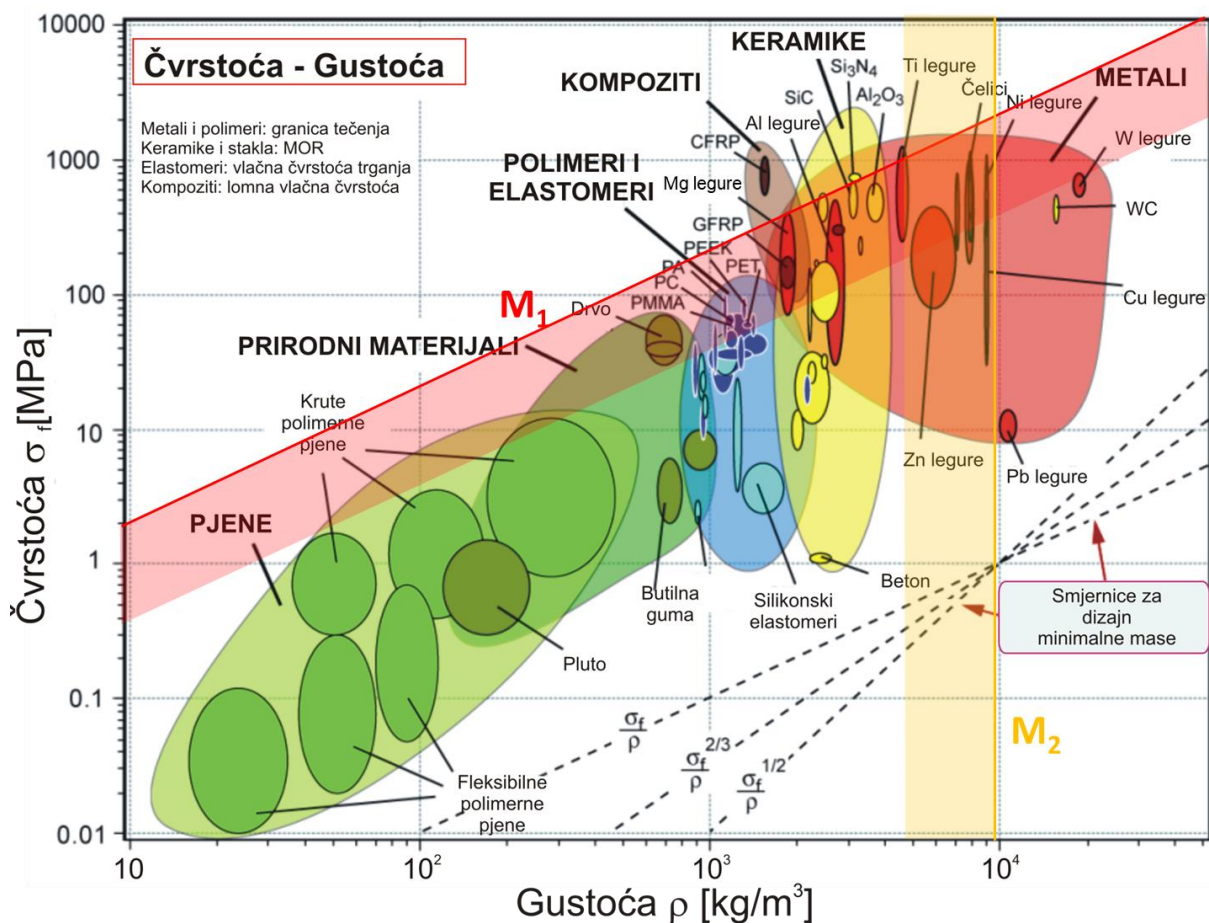
Najbolji materijali za zamašnjak visokih performansi su oni koji imaju visoku vrijednost indeksa materijala:

$$M_1 = \frac{\sigma_f}{\rho} \quad (6)$$

Za izbor materijala generiran je dijagram svojstava materijala (slika 2.24) kojem je gustoća os apscisa, a čvrstoća os ordinata. Smjernica za izbor ima nagib „1“ čijim se pomicanjem prema gornjem lijevom kutu optimira izbor materijala. Nagib smjernice se dobije logaritmiranjem izraza (6) i prikazom u formi jednadžbe pravca:

$$\log \sigma_f = 1 \cdot \log \rho + \log M_1 \quad (7)$$

Najbolji izbor su CFRP, titan legure visoke čvrstoće i neke keramike (koje se u pravilu odbacuju zbog njihove niske žilavosti).



Slika 2.24 Dijagram svojstava materijala „ $\rho - \sigma_f$ “

Tablica 2.13 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala za zamašnjak za dječje igračke

Zahtjevi dizajna za zamašnjak za dječje igračke Kriterij: zadana maksimalna kutna brzina	
FUNKCIJA	Zamašnjak za dječje igračke
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Vanjski promjer R - Kutna brzina ω Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Nema
CILJ	- Maksimalna kinetička energija po jedinici volumena
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala

Učinkovit zamašnjak s ograničenjem kutne brzine mora pohraniti što više energije po jedinici volumena pri konstantnoj kutnoj brzini ω . Pohranjena energija po jedinici volumena može se dobiti množenjem izraza (3) s gustoćom materijala:

$$\frac{E_k}{V} = \frac{E_k}{m} \cdot \rho = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot R^2 \cdot \omega^2 \quad (8)$$

Obzirom da su i radijus diska R i kutna brzina ω projektni zahtjevi, najbolji materijal je onaj s najvećom gustoćom ρ pa je indeks materijala za ovaj slučaj:

$$M_2 = \rho \quad (9)$$

Indeks materijala ucrtan je kao vertikalna linija u dijagramu svojstava materijala na slici 2.24.

Za izradu zamašnjaka za dječje igračke olovo je dobar materijal (znatno različit materijal od prvog slučaja). Volfram je bolji izbor, ali i znatno skuplji. Zlato, platina i uran (nisu obuhvaćeni korištenom bazom podataka) su najbolji, ali nepogodni kao izbor iz drugih razloga.

Dok je CFRP čvrsti i lagan materijal olovo je mekano i teško. Razlog ove razlike je u bitno različitim ograničenjima. Čak i najjače dijete ne može postići broj okretaja zamašnjaka koji će dovesti do njegova loma. Dakle kutna brzina je ograničena.

Interesantno je pogledati podatke u tablici 2.14 gdje je prikazana gustoća energije u ovisnosti o izvoru. Upotrebom CFRP može se pohraniti oko 400 kJ/kg energije. Iako je ova količina pohranjene energije značajna, ukoliko dođe do naglog oslobađanja energije (uslijed loma), posljedice mogu biti katastrofalne.

Zamašnjak mora biti zaštićen po obodu, te su visoki zahtjevi na preciznost pri izradi ovakvog zamašnjaka (radi balansiranja masa). Hibridni automobili (gorivo – električna energija) su već dulje vrijeme u upotrebi. Međutim prema tablici 2.14, gustoća energije koju akumulatori mogu sadržati je relativno niska <350 kJ/kg. Težina akumulatora limitira doseg i performanse automobila. Razmatra se upotreba zamašnjaka (s gustoćom energije u rangju najboljih baterija) u hibridnom automobilu. Testirane su izvedbe s parom suprotno rotirajućih diskova iz CFRP smještenih u kućištu s čeličnom zaštitom. Magneti ugrađeni na diskove prolaze pored zavojnice na kućištu i induciraju struju koja napaja pogonske elektromotore. Ovakvi zamašnjaci bi mogli električnom automobilu dati zadovoljavajući doseg uz cijenu koja je konkurentna cijeni automobila s motorom s unutrašnjim izgaranjem.

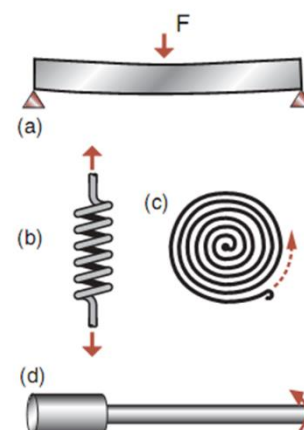
Tablica 2.14 *Gustoća energije u ovisnosti o izvoru*

Izvor	Gustoća energije [kJ/kg]	Komentar
Benzin	20.000	Oksidacija ugljikovodika – masa kisika nije uključena
Raketno gorivo	5000	Niža vrijednost jer je oksidirajući reagens dio goriva
Zamašnjak	400	Obećavajuće, ali još nedovoljno istraženo
Litij-ion baterija	350	Skupo, limitiran vijek trajanja
Ni-Cd baterija	170 – 200	Jeftinije od litij-ion baterije
Pb baterija	50 – 80	Velika masa
Opruga	5	Znatno neučinkovitije pohranjivanje energije

2.1.6 Zadatak 6 – Izbor materijala za opruge

Uvod

Opruge se koriste u raznim oblicima te imaju razne primjene: vlačne opruge, lisnate, spiralne, helikoidne i torzijske. Bez obzira na njihov oblik ili primjenu, najbolji materijal za opruge ima najveći omjer pohranjene energije prema jediničnom volumenu (ili masi).



Zadatak

Odrediti najbolje materijale za izradu opruge pri čemu se maksimizira:

- pohranjena elastična energija po jediničnom volumenu
- pohranjena elastična energija po jediničnoj masi
- pohranjena elastična energija po jediničnoj cijeni

Rješenje

Zahtjevi dizajna sažeti su u tablici 2.15.

Tablica 2.15 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala učinkovite opruge

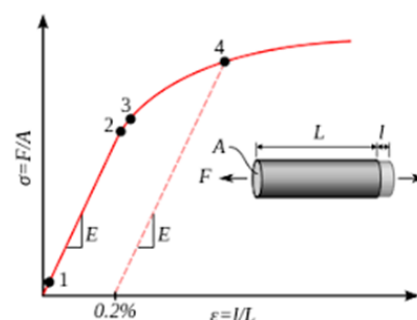
Zahtjevi dizajna za opruge	
FUNKCIJA	Elastična opruga
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Nema Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Ne smije doći do oštećenja / loma opruge $\sigma < \sigma_f$
CILJ	- Maksimalna pohranjena elastična energija po jediničnom volumenu - Maksimalna pohranjena elastična energija po jediničnoj masi - Maksimalna pohranjena elastična energija po jediničnoj cijeni
SLOBODNE VARIABLE	Izbor materijala

Osnovna funkcija opruge jest spremanje energije i, kada je potrebno, ponovno oslobađanje energije.

Elastična energija E_p po jedinici volumena u jednoliko napregnutom materijalu je:

$$E_{p,v} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \quad , \quad \frac{J}{m^3} \quad (1)$$

gdje je: E , GPa - Youngov modul elastičnosti

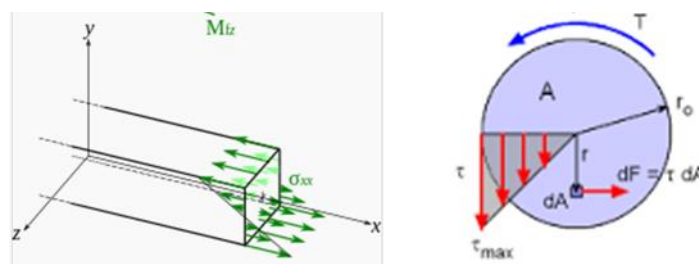


Cilj je maksimiziranje pohranjene energije E_p . Ukoliko naprezanje prijeđe granicu tečenja R_p ili čvrstoću materijala R_m doći će do oštećenja ili loma opruge. Postavlja se ograničenje da naprezanje mora biti manje od onoga koje izaziva oštećenje opruge (plastičnu deformaciju ili lom) tj. $\sigma < \sigma_f$.

Maksimalna gustoća pohranjene energije (za aksijalne opruge) po jedinici volumena je:

$$E_{p,v} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_f \cdot \varepsilon_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_f^2}{E} \quad (2)$$

Torzijske i lisnate opruge su manje učinkovite od aksijalnih opruga iz razloga što veliki dio materijala nije potpuno opterećen (slika 2.25). Materijal u zoni neutralne linije uopće nije opterećen.



Slika 2.25 Raspodjela naprezanja po presjeku savojne (lijevo) i torzijske (desno) opruge

Maksimalna gustoća pohranjene energije po jedinici volumena za lisnate opruge:

$$E_{p,v} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma_f^2}{E} \quad (3)$$

Maksimalna gustoća pohranjene energije po jedinici volumena za torzijske opruge:

$$E_{p,v} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_f^2}{E} \quad (4)$$

Kako se vidi iz izraza (2), (3) i (4) tip opruge nema utjecaja na izbor materijala.

Najbolji materijal za oprugu (maksimalna količina pohranjene energije po jedinici volumena) bez obzira na oblik je onaj s najvećom vrijednosti indeksa:

$$M_1 = \frac{\sigma_f^2}{E} \quad (5)$$

Ukoliko se želi maksimizirati specifična pohranjena energija po jedinici mase potrebno je izraz (5) podijeliti s gustoćom materijala:

$$M_2 = \frac{\sigma_f^2}{\rho \cdot E} \quad (6)$$

Ukoliko se želi maksimizirati specifična pohranjena energija po jediničnoj cijeni potrebno je izraz (6) podijeliti s cijenom materijala:

$$M_3 = \frac{\sigma_f^2}{\rho \cdot C_m \cdot E} \quad (7)$$

Izrazi za indekse materijala (6) i (7) se mogu prikazati kao:

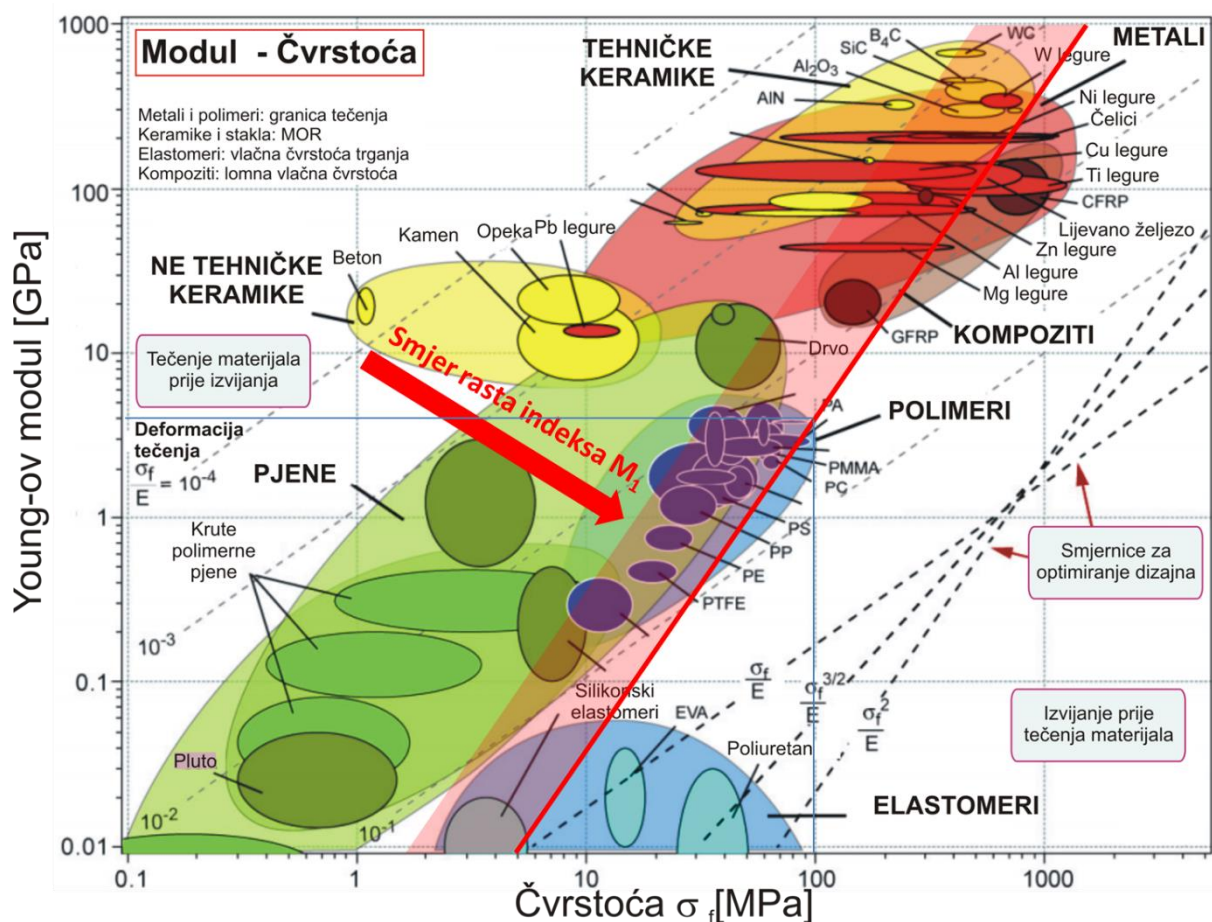
$$M_2 = \frac{(\sigma_f / \rho)^2}{(E / \rho)} \quad (8)$$

$$M_3 = \frac{(\sigma_f / (\rho \cdot C_m))^2}{(E / (\rho \cdot C_m))} \quad (9)$$

Za izbor najboljih materijala za izradu opruga s maksimalnom pohranjenom energijom po jedinici volumena koristi se dijagram svojstava materijala „ $\sigma_f - E$ “ prikazan u dijagramu na slici 2.26. Logaritmiranjem izraza (5) i prikazom u formi jednadžbe pravca slijedi:

$$\log E = 2 \cdot \log \sigma_f - \log M_1 \quad (10)$$

Iz izraza (10) proizlazi da je nagib smjernice za izbor „2“, a najbolji materijali se dobiju translacijom pravca prema donjem desnom kutu dijagrama (negativni predznak uz $\log M_1$).



Slika 2.26 Dijagram svojstava materijala „ $\sigma_f - E$ “

Materijali koji su najbolji za učinkovite opruge po jedinici volumena navedeni su u tablici 2.16. Od metala najbolji izbor su titan legure i čelici visoke čvrstoće (čelik za opruge) koji leže u gornjem kraju linije odabira. Također su dobri: CFRP (danas se koristi za kamionske opruge), najlon i PA (opruge za igračke) i elastomeri. Znakovito je da je postupak odabira identificirao materijale skoro svih klasa: metali, polimeri, elastomeri i kompoziti.

Tablica 2.16 Najbolji materijali za učinkovite opruge po jedinici volumena

Materijal	$M_1 = \sigma_f^2 / E$, MJ/m ³	Komentar
Ti legure	4 – 12	Skupe, otporne na koroziju
CFRP	6 – 10	Usporediv s čelikom po performansama, skup
Čelik za opruge	3 – 7	Tradicionalan izbor, lako se oblikuje i toplinski obrađuje
Najlon	1,5 – 2,5	Jeftin, lako se oblikuje, veliki koeficijent prigušenja (veliki gubici)
Guma	20 - 50	Bolja od čelika za opruge, veliki koeficijent prigušenja (veliki gubici)

Izbor najboljih materijala za opruge minimalne mase je prikazan u dijagramu specifična čvrstoća – specifični modul elastičnosti „ $\sigma_f / \rho - E / \rho$ “ (slika 2.27). Linije za izbor imaju nagib 2, povezujući materijale s istim indeksom materijala:

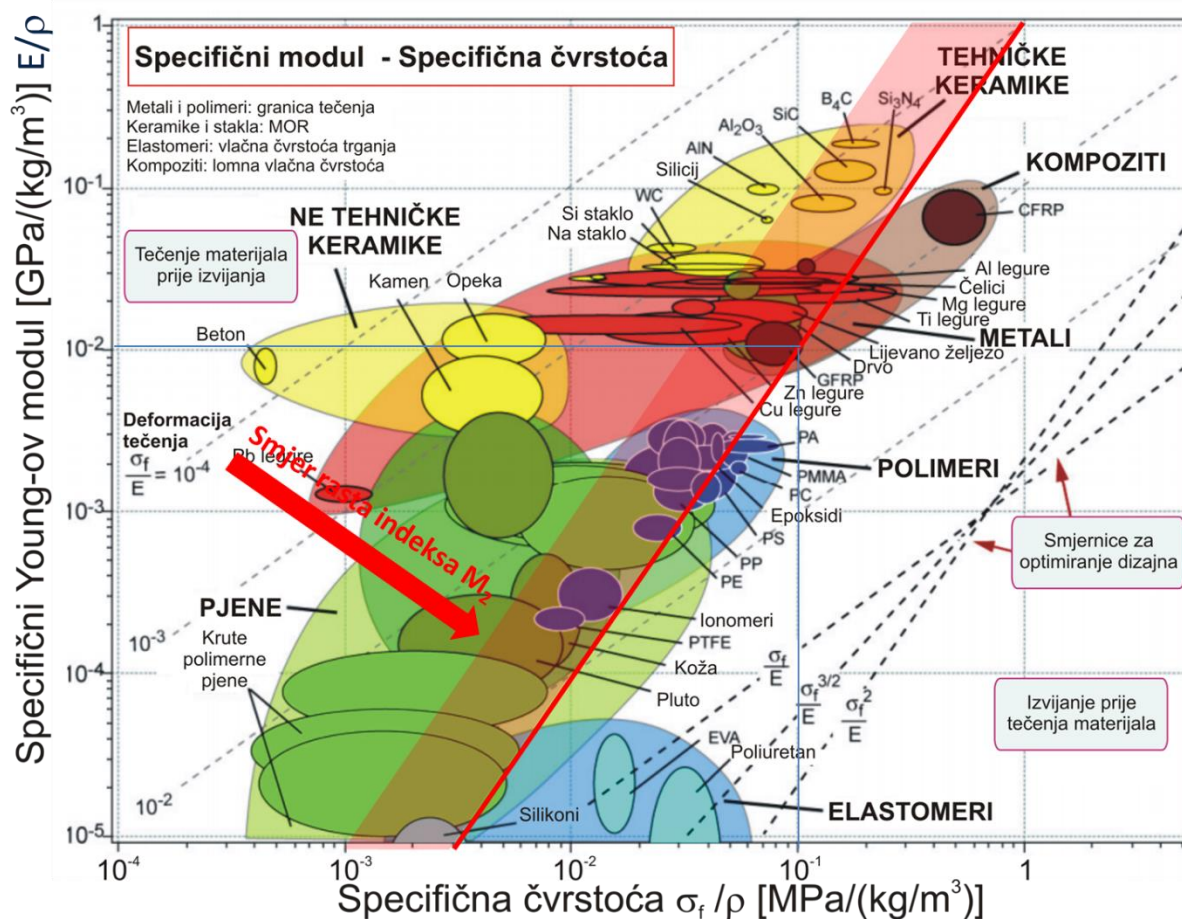
$$M_2 = \frac{\sigma_f^2}{E \cdot \rho} = \frac{\sigma_f^2}{\frac{E}{\rho} \cdot \rho^2} = \left(\frac{\sigma_f}{\rho} \right)^2 \bigg/ \left(\frac{E}{\rho} \right) \quad (11)$$

$$\log \left(\frac{E}{\rho} \right) = 2 \cdot \log \left(\frac{\sigma_f}{\rho} \right) - \log M_2 \quad (12)$$

Materijali koji su najbolji za učinkovite opruge po jedinici mase navedeni su u tablici 2.17.

Kod izbora materijala za konkretne opruge trebalo bi uzeti u obzir i dodatna ograničenja. Opruge za suspenzije vozila moraju biti otporne na zamor materijala i koroziju. Opruge za ventile kod motora moraju podnositi visoke temperature. Važno svojstvo povezano s gubicima je koeficijent prigušenja (rasipanje energije, zagrijavanje). Polimeri imaju relativno visok koeficijent prigušenja i rasipaju energiju kod vibracija. Metali, ako su u očvrnutom stanju, nemaju sklonost rasipanju energije. Polimeri, zbog puzanja, nisu podesni za trajno opterećene opruge, mogu se koristiti za primjene kod kojih je opruga uglavnom neopterećena.

Na analogan način bi se odredili i materijali za jeftine učinkovite opruge korištenjem dijagrama svojstava materijala „ $\sigma_f / (\rho \cdot C_m) - E / (\rho \cdot C_m)$ “.

Slika 2.27 Dijagram svojstava materijala „ $\sigma_f/\rho - E/\rho$ “

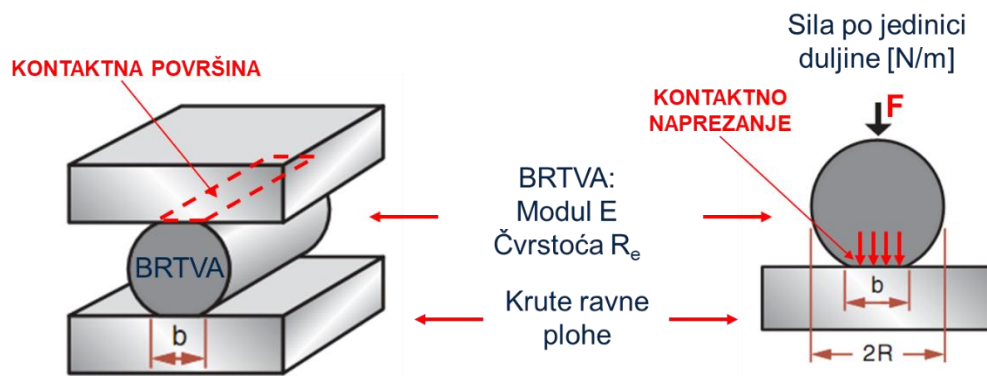
Tablica 2.17 Najbolji materijali za učinkovite opruge po jedinici mase

Materijal	$M_2 = \sigma_f^2 / \rho \cdot E$, kJ/kg	Komentar
Ti legure	0,9 – 2,6	Bolje od čelika, otporne na koroziju, skupe
CFRP	3,9 – 6,5	Bolji od čelika, skupi
GFRP	1,0 – 1,8	Bolji od čelika za opruge, manje skupi od CFRP
Čelik za opruge	0,4 – 0,9	Loš zbog velike gustoće
Drvo	0,3 – 0,7	Prema kriteriju mase – dobro
Najlon	1,3 – 2,1	Dobar poput čelika, veliki koeficijent prigušenja
Guma	18 - 45	Izvanredna, 20X bolja od čelika, ali ima veliki koeficijent prigušenja

2.1.7 Zadatak 7 – Izbor materijala za brtve

Uvod

Brтва za višekratnu upotrebu je najčešće materijal cilindričnog oblika komprimiran između dvije površine. Brтва mora formirati što širu kontaktnu plohu „ b ” (slika 2.28). Istovremeno, kontaktno naprezanje mora ostati elastično kako bi se brtva mogla ponovno upotrijebiti.



Slika 2.28 Shematski prikaz opterećene brtve

Zadatak

Koji materijali čine dobre brtve? Naravno – ELASTOMERI. Ovu tvrdnju treba potvrditi sistematskim pristupom odabira.

Rješenje

Zahtjevi dizajna su prikazani u tablici 2.18. Silu F kojom se ostvaruje brtvljenje treba prilagoditi dozvoljenom naprezanju (manje od granice elastičnosti).

Tablica 2.18 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala za brtve

Zahtjevi dizajna za brtve	
FUNKCIJA	Elastična brtva
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Dimenzija brtve R Limitirajuća ograničenja - Ograničeno kontaktno naprezanje $\sigma < 100 \text{ MPa}$ Aktivno ograničenje - Ne smije doći do oštećenja kontaktne plohe
CILJ	- Maksimalna prilagodljivost površini
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Sila pritezanja opruge F

Cilindar promjera $2R$ i modula elastičnosti E komprimiran između krutih ravnih ploha silom F po jediničnoj duljini, formira elastični kontakt širine b gdje je (prema literaturi – slika 2.29) :

$$b = 2 \cdot a \approx 4 \cdot \left(\frac{F \cdot R}{\pi \cdot E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Širina kontaktne površine brtve b je vrijednost koju treba maksimalizirati.

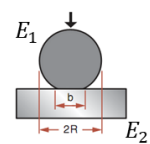
Kontaktno naprezanje u brtvi (prema literaturi – slika 2.29) i površini je dano izrazom:

$$\sigma = \left(\frac{F \cdot E}{\pi \cdot R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Iz literature:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

Parameter	Circular contact (Diameter = $2a$, Load = W)	Line contact (Width = $2a$, Load = W' /unit length along y axis)
Semi-contact radius or width	$a = \left(\frac{3WR}{4E^*} \right)^{1/3}$	$a = 2 \left(\frac{W'R}{\pi E^*} \right)^{1/2}$
Normal approach	$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9W^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}$	$\delta = \frac{2W'}{\pi}$
Contact Pressure	$p = p_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}^{1/2}$ $p_0 = \frac{3}{2} p_m = \frac{3W}{2\pi a^2}$ $= \left(\frac{6WE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}$	$p = p_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\}^{1/2}$ $p_0 = \frac{4}{\pi} p_m = \frac{4W'}{\pi a}$ $= \left(\frac{W'E^*}{\pi R} \right)^{1/2}$
Maximum tensile stress	$(1 - 2\nu) p_0/3$ at $r = a$ (on the contact plane, $z = 0$)	Zero
Maximum shear stress	$0.31 p_0$ at $r = 0$ and $z = 0.48a$ for $\nu = 0.3$	$0.30 p_0$ at $x = 0$ and $z = 0.78a$ for all ν
Limit of elastic deformation	$(p_0)_y = 1.60Y = 3.2k$, Tresca criterion $= 1.60Y = 2.8k$, von Mises criterion	$(p_0)_y = 1.67Y = 3.3k$ Tresca criterion $= 1.79Y = 3.1k$, von Mises criterion ($\nu = 0.3$) (von Mises depends on ν)



$$b = 2 \cdot a$$

$$a = 2 \cdot \left(\frac{F' \cdot R}{\pi \cdot E^*} \right)^{1/2}$$

$$b = 4 \cdot \left(\frac{F \cdot R}{\pi \cdot E} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_0 = \left(\frac{F' \cdot E^*}{\pi \cdot R} \right)^{1/2}$$

Slika 2.29 Izvadak iz literature s izrazima za proračun elastičnih opruga

Ograničenje: opterećenje brtve mora ostati u elastičnom području tj. naprezanje σ mora biti manje od granice tečenja materijala R_p .

Korištenjem izraza (1) i (2) te eliminacijom slobodne varijable sile F te zamjenom $\sigma = R_p$:

$$b \leq 4 \cdot R \cdot \left(\frac{R_p}{E} \right) \quad (3)$$

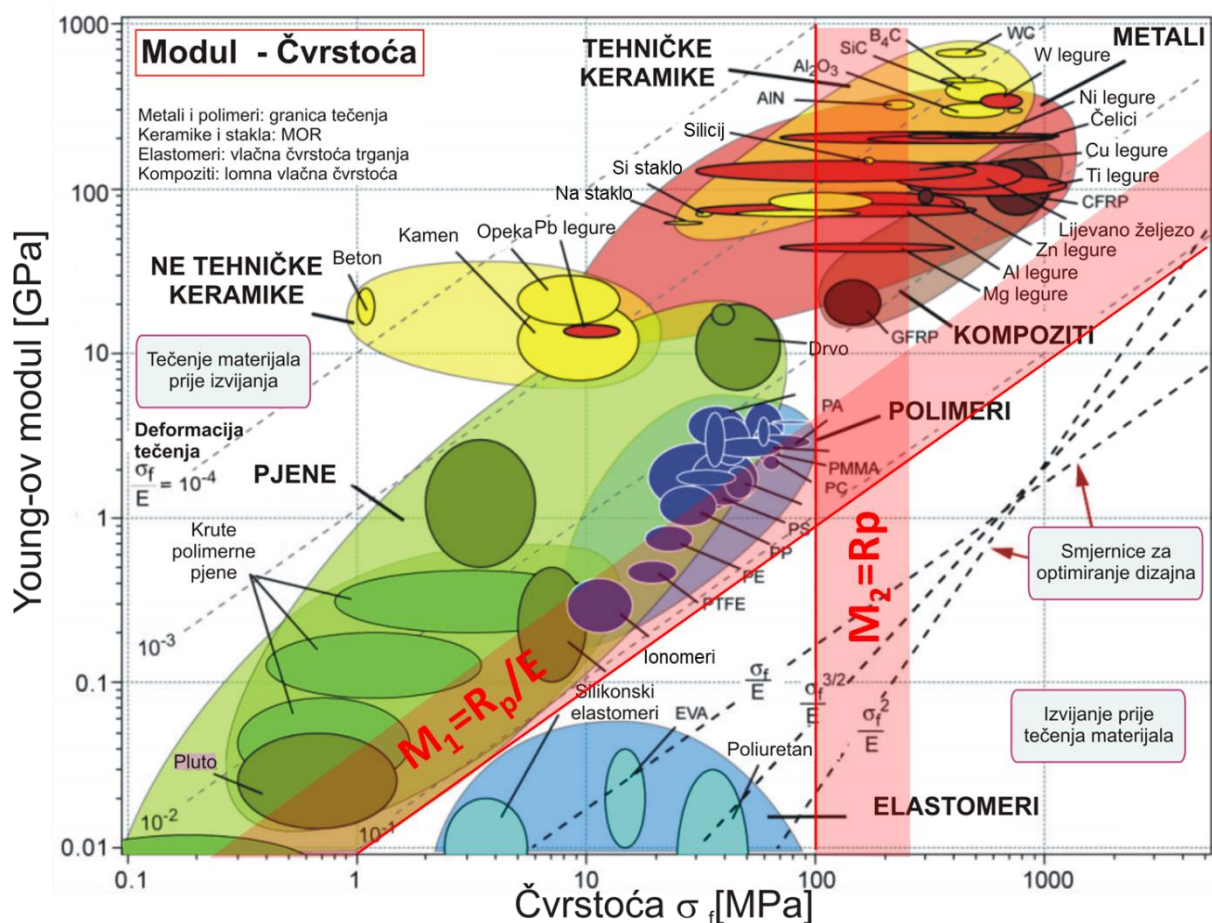
Širina kontakta „b” će biti najveća za maksimalan iznos indeksa materijala:

$$M_1 = \frac{R_p}{E} \quad (4)$$

Logaritmiranjem i uređenjem izraza (4) slijedi:

$$\log E = 1 \cdot \log R_p - \log M_1$$

Nagib smjernice za izbor je jednak „1“, a negativni predznak ispred „ $\log M_1$ “ upućuje da se područje pretraživanja nalazi ispod smjernice u dijagramu svojstava materijala „ $R_p - E$ “ na slici 2.30. U dijagramu je ucrtano i ograničenje čvrstoće materijala brtve od 100 MPa. Na taj način je spriječeno oštećenje kontaktne plohe u slučaju da dođe do preopterećenja (oštećena će biti brtva).



Slika 2.30 Dijagram svojstava materijala „ $R_p - E$ “

Najviše rangirani materijali su prikazani u tablici 2.19.

Tablica 2.19 Najviše rangirani materijali za izradu brtvi

Materijal	M_1	Komentar
Elastomer EVA	0,7 – 1	Uobičajen odabir, loša otpornost na temperature i neke rastvarače
Poliuretan	2 – 5	U širokoj upotrebi za brtve
Silikonske gume	0,2 – 0,5	Bolje podnosi povišene temp. od elastomera s karbonskim lancima, kemijski inertne
PTFE	0,05 – 0,1	Skup, kemijski postojan, otporan na visoke temp.
Polietilen	0,02 – 0,05	Jeftin, ali se lako zalijepi na površinu
Polipropilen	0,02 – 0,04	Jeftin, ali se lako zalijepi na površinu
Najlon	0,02 – 0,03	Blizu gornje granice kontaktnog pritiska
Pluto	0,03 – 0,06	Niski kontaktni pritisak, kemijski stabilno
Polimerna pjena	do 0,03	Vrlo niski kontaktni pritisak, fina brtva

Ova analiza naglašava funkciju koju brtva obavlja: velika kontaktna površina, ograničen kontaktni pritisak, kemijska stabilnost, povišena radna temperatura. Elastomeri maksimiziraju kontaktnu površinu, pjene i pluto minimaliziraju kontaktni pritisak, PTFE i silikonska guma su najotporniji na povišenu temperature i organske rastvore. Konačan odabir ovisi o radnim uvjetima.

2.1.8 Zadatak 8 – Izbor materijala za posude pod tlakom

Uvod

Postoje dva temeljna pristupa projektiranja tlačnih posuda:

1. tečenja materijala se javlja prije loma materijala („yield before break”)
2. dolazi do curenja medija prije loma materijala („leak before break”) i smanjenja pritiska u posudi

MALE POSUDE POD TLAKOM (bojleri, makete...), obično su dizajnirane tako da dozvole tečenje materijala pri dovoljno niskom tlaku koji ne može uzrokovati širenje pukotine koju materijal posude može imati (tečenje prije loma – „yeild before break”). Deformaciju uzrokovanu tečenjem materijala je lako uočiti, pa se tlak u posudi može sigurno otpustiti.



Kod **VELIKIH POSUDA POD TLAKOM** plastična deformacija se teško može uočiti. Siguran dizajn se postiže tako da se osigura da kritična dimenzija pukotine (kod koje dolazi do nestabilnog širenja – trenutni lom) bude veća od debljine stjenke posude (curenja medija prije loma – „leak before break”). U



slučaju preopterećenja dolazi do curenja medija što se lako uočava, a i osigurava postupno otpuštanje tlaka.

Rješenje

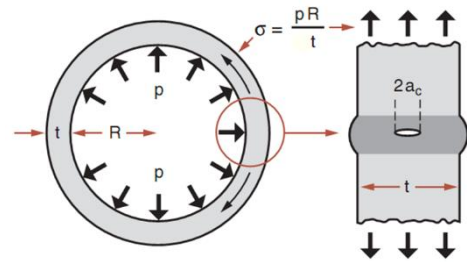
Zahtjevi dizajna su prikazani u tablici 2.18.

1. Male posude pod tlakom

Naprezanje po obodu stjenke debljine t sferične tlačne posude radijusa R je:

$$\sigma = \frac{p \cdot R}{t} \quad (1)$$

Kod dizajna tlačne posude debljina stijenke t je odabrana tako da je, pri radnom tlaku p , naprezanje manje od granice tečenja materijala (naravno uz sigurnosni faktor) Male posude se mogu ispitati ultrazvukom i RTG metodom kako bi se utvrdilo da nemaju grešku veću od $2 \cdot a_c$.



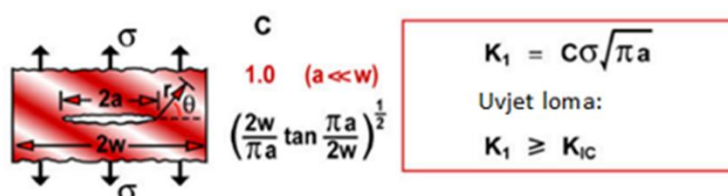
Tablica 2.20 Tablica sa zahtjevima dizajna za tlačnu posudu

Zahtjevi dizajna za posudu pod tlakom	
FUNKCIJA	Tlačna posuda
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Radijus spremnika R - Pritisak u spremniku p Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Lomna žilavost
CILJ	1. Maksimalna sigurnost uz kriterij „yield before break” – male posude (maksimalizacija dopuštenog tlaka) 2. Maksimalna sigurnost uz kriterij „leak before break” – velike posude (maksimalizacija dopuštene veličine pukotine)
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Debljina stijenke t i naprezanje σ

Naprezanje (prema priručniku s korisnim rješenjima – slika 2.31) potrebno da dođe do rasta pukotine:

$$\sigma = \frac{K_{1c}}{C \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c}} \quad (2)$$

gdje je $C \approx 1$ konstanta ovisna o lokaciji pukotine i smjeru naprezanja, a K_{1c} lomna žilavost za ravninsko stanje deformacije. Sigurnost se postiže ako je radno naprezanje manje od gore navedenog.



Slika 2.31 Izvadak iz priručnika – lomna žilavost

Eliminacijom slobodne varijable σ iz izraza (1) i (2) te konstante $C \approx 1$ (slika 2.31) slijedi:

$$p \leq \frac{t}{R} \cdot \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi \cdot a_c}} \quad (3)$$

Materijal koji može podnijeti najveći tlak je onaj s najvećim indeksom:

$$M_1 = K_{1c} \quad (4)$$

Nedostatak ove metode je što, ukoliko se inspekcijom ne otkriju postojeće greške veće od kritične, može doći do katastrofe. Veća sigurnost se osigurava zahtjevom da se pukotina ne širi čak i ako naprezanje dosegne granicu tečenja materijala – tako da se posuda stabilno deformira.

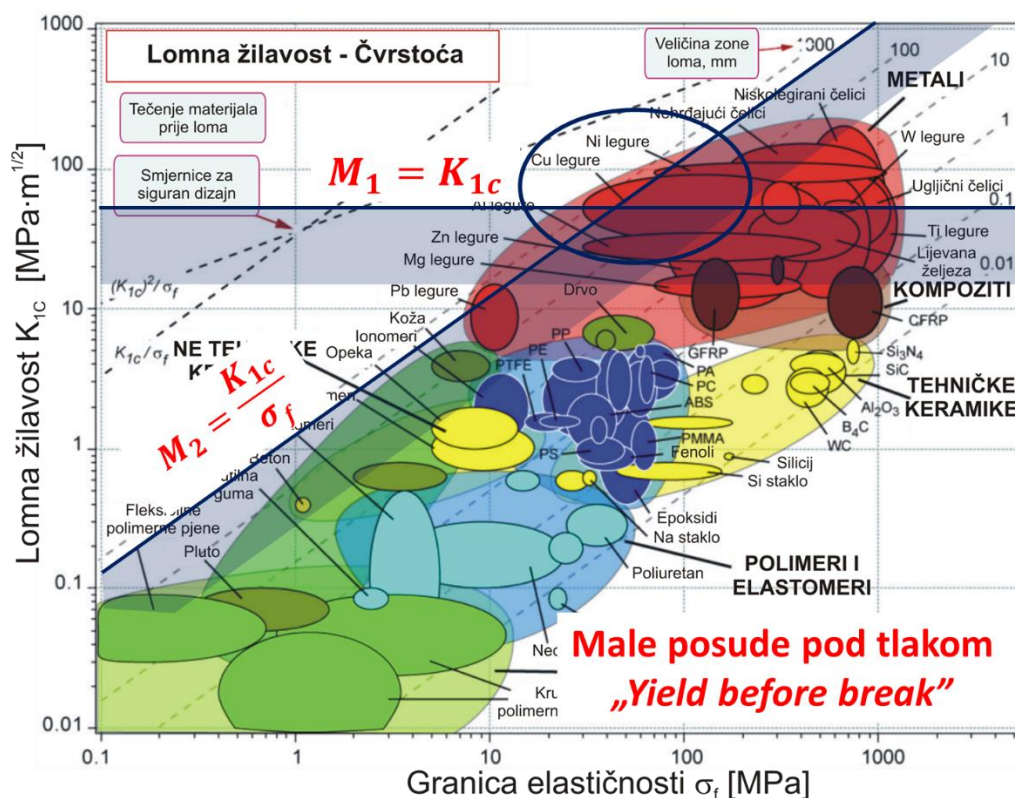
Uvrštavanjem $\sigma = R_p$ u izraz (2), ovaj uvjet je izražen kao:

$$\pi \cdot a_c \leq C^2 \left[\frac{K_{1c}}{R_p} \right]^2 \quad (5)$$

Maksimalna tolerantna veličina pukotine se postiže korištenjem materijala s najvećom vrijednosti indeksa:

$$M_2 = \frac{K_{1c}}{R_p} \quad (6)$$

Izbor materijala za male posude pod tlakom vrši se prema dijagramu svojstava materijala „ $\sigma_f - K_{1c}$ “ prikazanom na slici 2.32 primjenom indeksa M_1 i M_2 prema izrazima (4) i (6).



Slika 2.32 Dijagram svojstava materijala „ $\sigma_f - K_{1c}$ “ – male posude pod tlakom

Za izradu malih posuda pod tlakom najbolji izbor su legure bakra i nikla.

2. Velike posude pod tlakom

Velike tlačne posude se ne mogu uvijek u potpunosti ispitati nerazornim metodama. Pukotina može napredovati sporo uslijed korozije ili cikličkog opterećenja, tako da samo ispitivanje prije upotrebe nije dovoljno. Sigurnost se postiže ako je veličina pukotine, koja prodire od vanjske do unutrašnje površine stijenke, još uvijek stabilna.

Kod ovakvog dizajna dolazi do curenja sadržaja spremnika uslijed stabilnog širenja pukotine kroz čitavu stjenku.

Ovakav dizajn postiže se ako se u izraz za lomnu žilavost (2) uvrsti da je $a_c = t/2$:

$$\sigma = \frac{K_{1c}}{C \cdot \sqrt{\pi \cdot \frac{t}{2}}} \quad (7)$$

Debljina stijenke posude t mora biti tolika da podnosi tlak p bez pojave tečenja materijala:

$$t \geq \frac{p \cdot R}{R_p} \quad (8)$$

Eliminacijom slobodne varijable t u izrazima (7) i (8) uz $\sigma = R_p$ daje:

$$p \leq \frac{2}{\pi \cdot C^2 \cdot R} \cdot \left(\frac{K_{1c}^2}{R_p} \right) \quad (9)$$

Maksimalni dopušteni tlak se postiže upotrebom materijala čija je maksimalna vrijednost indeksa:

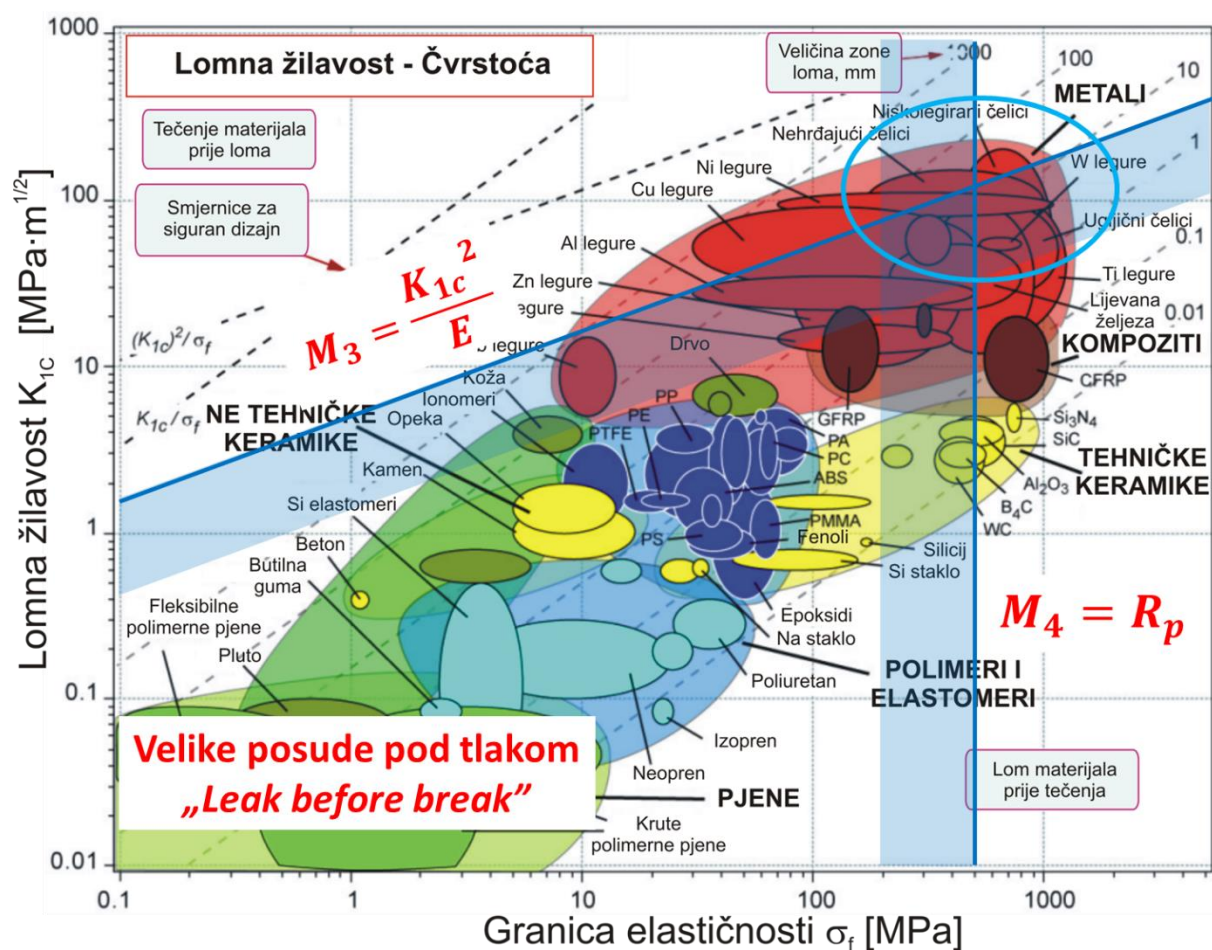
$$M_3 = \frac{K_{1c}^2}{R_p} \quad (10)$$

Indeksi M_2 i M_3 mogu biti visoki upotrebom materijala s niskom vrijednosti R_p .

Olovo, s visokim vrijednostima M_2 i M_3 očito se neće upotrijebiti za izradu spremnika. Razlog je što debljina stijenke ne smije biti prevelika, kako iz ekonomskih razloga, tako i u cilju što lakše konstrukcije. Najmanju debljinu stijenke, prema izrazu (8) će imati spremnik izrađen iz materijala čija je najveća vrijednost indeksa:

$$M_4 = R_p \quad (11)$$

Kod dizajna „leak before break” kao kriterije odabira koriste se indeksi $M_3 = K_{1c}^2/R_p$ i $M_4 = R_p$ prema dijagramu svojstava materijala „ $\sigma_f - K_{1c}$ ” prikazanom na slici 2.33.



Slika 2.33 Dijagram svojstava materijala „ $\sigma_f - K_{1c}$ “ – velike posude pod tlakom

Kod izbora materijala za male posude pod tlakom prema kriteriju „*yield before brake*“ prema indeksima M_1 i M_2 isključuju se svi materijali osim legura čelika, bakra, aluminija i titana.

Spuštanjem razine indeksa M_1 u obzir dolaze i neki polimeri kao PP, PE i PET (spremnici za sokove i pivo npr.).

Kod izbora materijala za velike posude pod tlakom prema kriteriju „*leak before brake*“ prema indeksima M_3 i M_4 favorizira se niskolegirani i ugljični čelik. Ovaj kriterij isključuje polimere iz razmatranja.

Rekapitulacija izbora prikazana je u tablici 2.21. Velike posude se u pravilu izrađuju iz čelika. Tlačni spremnici za modele (npr. parnog stroja) se rade iz bakra zbog veće otpornosti na koroziju. Napredovanje korozije se ne smanjuje u razmjerno s veličinom spremnika. Gubitak materijala od 0,1 mm kod velikih spremnika debljine stjenke 10 mm nije značajan. Međutim, kod malih spremnika čija je stjenka 1 mm ne može se zanemariti gubitak materijala uslijed korozije od 0,1 mm. Nekad su lomovi kod tlačnih posuda bili česti. Danas su rijetka pojava,

iako se događaju zbog minimiziranja sigurnosnih faktora (rakete i zrakoplovi). Ovaj relativni uspjeh je jedan od glavnih doprinosa mehanike loma u inženjerskoj praksi.

Tablica 2.21 Materijali za izradu malih i velikih posuda pod tlakom

Materijal	$M_2 = K_{1c} / R_p$	$M_4 = \sigma_y$	Komentar
Nehrđajući čelik	0,35	300	Posude pod tlakom u nuklearnim postrojenjima izrađuju se iz AISI 316 nehrđajućeg čelika
Niskolegirani čelik	0,2	800	Standardni materijal za posude pod tlakom
Bakar	0,5	200	Hladno valjani bakar koristi se za male tlačne spremnike
Legure Al	0,15	200	Tlačni spremnici kod raketa
Legure Ti	0,13	800	Dobri za niskotlačne posude - skupe

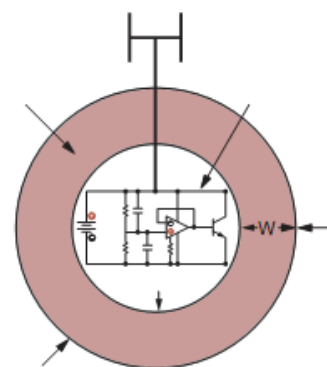
2.1.9 Zadatak 9 – Izbor materijala za izolaciju kratkotrajnog izotermnog spremnika

Uvod

Svaki vojni pilot, za hitne slučajeve, uz sebe ima radio lokator. Ukoliko lokator padne u more temperature 4°C (koje pokriva veliki dio zemljine površine) uređaj se hladi. Ispravan rad lokatora dolazi u pitanje kada njegova temperatura značajno padne.

Zadatak

Specifikacija dizajna za sferični spremnik lokatora zahtjeva da se, kada se temperatura vanjske površine snizi za 30°, temperatura unutarnje površine ne promjeni bitno unutar jednog sata. Kako bi uređaj imao prihvatljive dimenzije, debljina stijenke spremnika ne smije biti veća od 20 mm. Izabrati materijal za kratkotrajni izotermni spremnik sferičnog oblika radijusa R i debljine stijenke w .



Rješenje

Zahtjevi dizajna sažeti su u tablici 2.22.

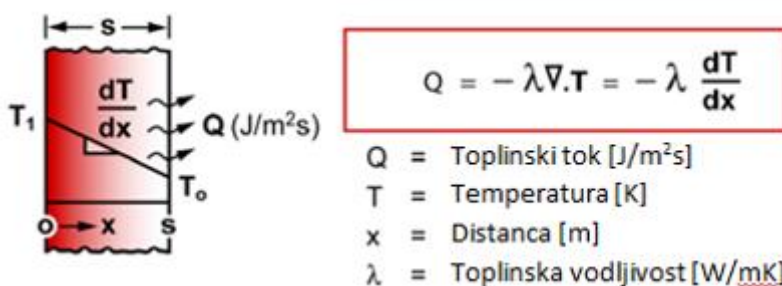
Tablica 2.22 Tablica sa zahtjevima dizajna za kratkotrajni izotermni spremnik

Zahtjevi dizajna za spremnik radio lokatora	
FUNKCIJA	Kratkotrajni izotermni spremnik
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Debljina stijenke w - Inicijalna razlika temperatura unutar i izvan spremnika Δt Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Lomna žilavost
CILJ	Maksimalizacija vremena „ t ” koje protekne dok se temperatura u spremniku značajnije snizi
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala

Neka je spremnik debljine stijenke w i toplinske vodljivosti λ . Stacionarni toplinski tok q kroz stjenku (izvadak iz Priručnika – slika 2.34) je:

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} = \lambda \cdot \frac{(T_i - T_o)}{w} \quad (1)$$

gdje su T_o i T_i temperature vanjske i unutarnje površine stijenke spremnika.



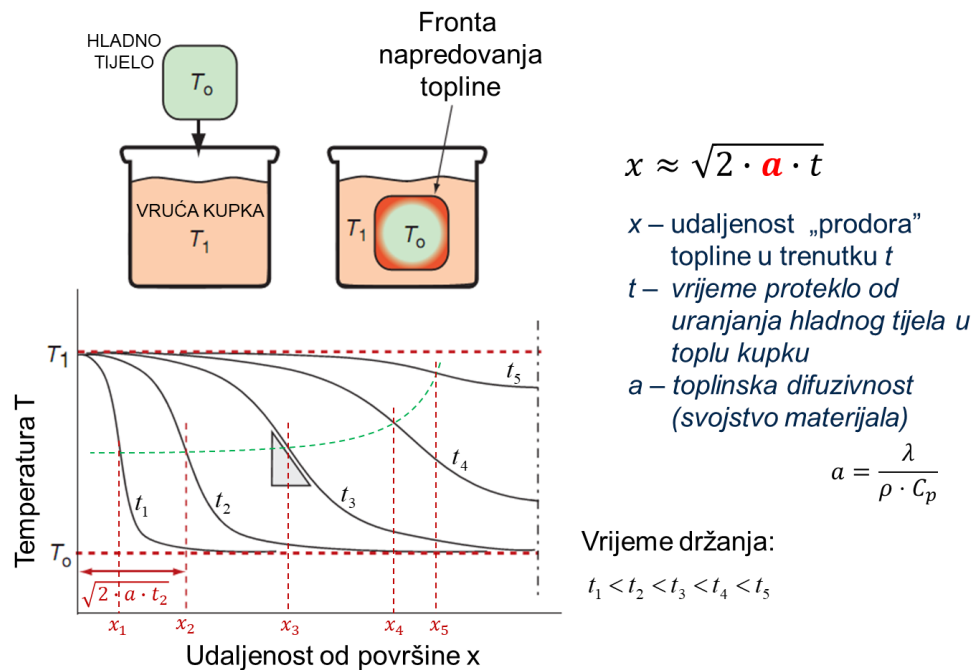
Slika 2.34 Izvadak iz priručnika s korisnim rješenjima za stacionarni toplinski tok

Ako je cilj minimalizacija toplinskog toka q onda je indeks za izbor materijala ujedno i svojstvo materijala – koeficijent toplinske vodljivosti:

$$M_1 = \lambda \quad (2)$$

Međutim, zadatak nije minimalizacija toplinskog toka nego maksimalizacija vremena značajnije promjene temperature unutrašnje površine spremnika. Kada se temperatura naglo

promjeni, može se reći da „temperaturni val” prodire prema unutrašnjosti spremnika. U ovom slučaju radi se o nestacionarnom toplinskom toku (slika 2.35).



Slika 2.35 Nestacionarni toplinski tok

Udaljenost x „prodora” topline u trenutku t je:

$$x \approx \sqrt{2 \cdot a \cdot t} \quad (3)$$

gdje je a svojstvo materijala - toplinska difuzivnost, definirana s:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \quad (4)$$

gdje je: ρ - gustoća materijala; C_p - specifična toplota materijala.

Kada se uvrsti da je $x = w$ (udaljenost prodora topline = debljina stijenke spremnika) u izraz (3) slijedi:

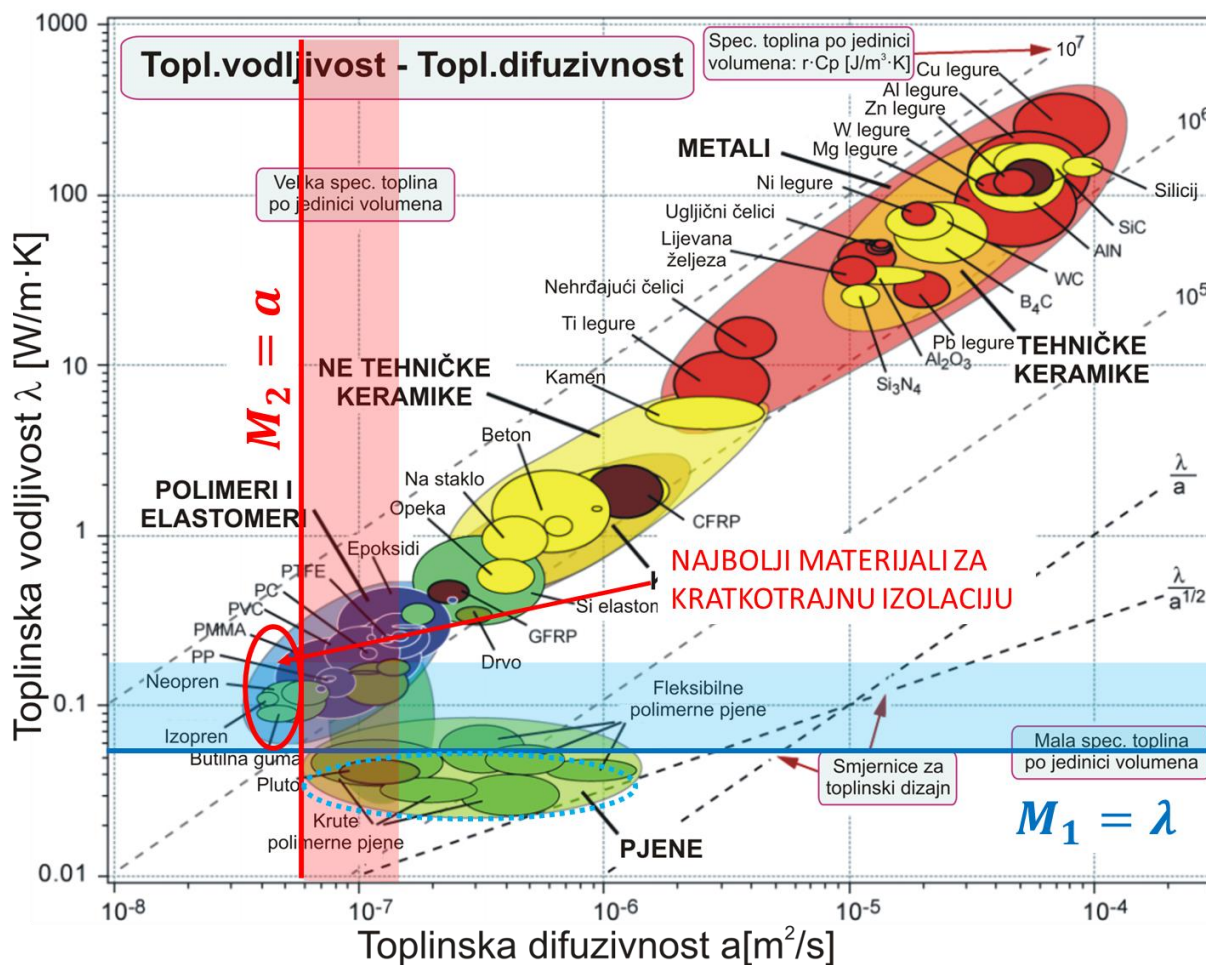
$$t \approx \frac{w^2}{2 \cdot a} \quad (5)$$

Dakle, maksimalizacija vremena t će biti ostvarena korištenjem materijala s najmanjom vrijednosti svojstva toplinske difuzivnosti, a ne toplinske vodljivosti:

$$M_2 = a \quad (5)$$

U svrhu odabira dovoljan bi bio i trakasti dijagram za svojstvo toplinske difuzivnosti materijala

Izbor u ovom slučaju je izvršen korištenjem dijagrama $\lambda - a$, kako bi pokazali da kriteriji postavljeni indeksima M_1 i M_2 daju drukčije rezultate (slika 2.36).



Slika 2.36 Dijagram svojstava materijala „ $\lambda - a$ “

U tablici 2.23 dan je sažetak s materijalima visokih vrijednosti indeksa M_1 i M_2 .

Tablica 2.23 Materijali za izradu kratkotrajnog izotermnog spremnika

Materijal	$M_1 = \lambda$ W/m·K	$M_2 = a$ m²/s	Komentar
Elastomeri: neopren, izopren	0,1	$5 \cdot 10^{-8}$	Najbolji izbor za kratkotrajni izotermni spremnik
Polimeri: polietilen, polipropilen	0,11	$8 \cdot 10^{-8}$	Manje skupi od elastomera, ali ne tako dobri
Polimerne pjene	0,04	$2 \cdot 10^{-7}$	Znatno lošije od elastomera, najbolji izbor za dugotrajnu stacionarnu izolaciju

Spremnici izrađeni iz gume, izoprena ili neoprena (iste debljine stjenke) će dati lokatoru deset puta dulji vijek trajanja nego ako su izrađeni iz pjene polistirena. Spremnik izrađen iz neoprena

($a = \frac{5 \times 10^{-8} \text{ m}^2}{\text{s}}$) debljine stjenke 22 mm će omogućiti više od 1 sat prije nego se temperatura unutarnje površine značajnije promjeni. Moguć je i bolji odabir, npr. niskotaljivi vosak čije je skrutište na temperaturi koja odgovara najnižoj prihvatljivoj temperaturi za ispravan rad lokatora. Uslijed skrućivanja, tekući vosak odaje latentnu toplinu sprječavajući tako brzo sniženje temperature.

3 IZBOR MATERIJALA U SLUČAJU VIŠE OGRANIČENJA I JEDNOG CILJA

3.1.1 Zadatak 1 – Klipnjača motora visokih performansi

Uvod

Klipnjača je sastavni dio motora, kompresora i pumpi visoke učinkovitosti. U praksi, uslijed velikih inercijskih sila, te uslijed izvijanja dolazi do loma ovog dijela. Kako bi se smanjile inercijske sile i opterećenja ležajeva, masa klipnjače mora biti što manja. Ovaj zahtjev dovodi do upotrebe laganih, granično opterećenih, materijala visoke čvrstoće.

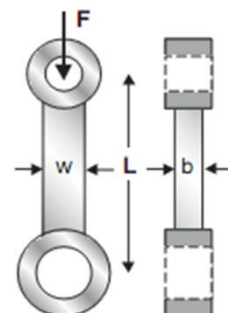


Kod motora velikog broja okretaja dolazi do pojave lomova uslijed zamora materijala. Kada je cilj dizajna minimalni trošak, klipnjače se često rade iz lijevanog željeza (jeftina izvedba).

Zadatak

Koji je materijal najbolji za ako je cilj postizanje maksimalnih performansi motora?

Dva su ograničenja dizajna i to nosivost kod maksimalnih opterećenja bez loma uslijed: zamora ili elastičnog izvijanja. Zbog jednostavnosti pretpostavljen je pravokutni presjek klipnjače površine $A = b \cdot w$.



1. Primjenom „min-max” metode izabrati najbolji od materijala ponuđenih u tablici 3.1.
2. Odrediti „spojnu konstantu”, te u dijagramu svojstava materijala odrediti najbolje materijale primjenom „spojnice” i „okvira za odabir” !

Tablica 3.1 Materijali ponuđeni za izradu klipnjače

Materijal	ρ , kg/m ³	E , GPa	R_d , MPa
Nodularni lijev	7150	178	250
Brzorezni čelik HSLA 2120	7850	210	590
Aluminijeva legura za lijevanje S355.0	2700	70	95
Duralkan - Al-SiC kompozit	2880	110	230
Legura titana 6Al 4V	4400	115	530

Rješenje

Zahtjevi dizajna, za klipnjaču minimalne mase, su sažeti u tablici 3.2.

Tablica 3.2 Tablica sa zahtjevima dizajna za klipnjaču motora visokih performansi

Zahtjevi dizajna za klipnjaču motora visokih performansi	
FUNKCIJA	Klipnjača motora
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina klipnjače $L = 200$ mm ; - Opterećenje klipnjače $F = 50$ kN ; - Faktor oblika poprečnog presjeka $\alpha = b/w = 0,8$; - Faktor uvećanja mase za provrte za ležajeve $\beta = 1,5$ Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje 1. Ne smije doći do loma zbog zamora 2. Ne smije doći do loma zbog izvijanja
CILJ	Minimalizacija mase
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Površina poprečnog presjeka A

Funkcija cilja se određuje iz izraza za masu klipnjače:

$$m = \beta \cdot A \cdot L \cdot \rho \quad (1)$$

Prvo ograničenje jest dinamička izdržljivost klipnjače (čvrstoća). Maksimalno naprezanje (vlačno – tlačno) koje se javlja mora biti manje od dinamičke izdržljivosti materijala:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq R_d \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{F}{R_d} \quad (2)$$

Eliminacijom slobodne varijable A iz izraza (1) i (2) slijedi funkcija cilja za prvo ograničenje:

$$m_1 = \beta \cdot F \cdot L \cdot \left(\frac{\rho}{R_d} \right) \quad (3)$$

Najbolji materijali imaju minimalnu vrijednost indeksa materijala:

$$M_1 = \frac{\rho}{R_d} \quad (4)$$

Drugo ograničenje je elastična stabilnost klipnjače. Kritična sila za izvijanje mora biti veća od maksimalne sile koja se javlja pri tlačnom opterećenju.

Koristi se izraz za Eulerovo elastično izvijanje:

$$F_{krit} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L^2} \geq F \quad (5)$$

Minimalni aksijalni moment inercije presjeka je:

$$I_{min} = \frac{w \cdot b^3}{12} \quad (6)$$

Kako je $b = \alpha \cdot w$ minimalni aksijalni moment inercije presjeka je:

$$I_{min} = \frac{w \cdot b \cdot b^2}{12} = \frac{\alpha \cdot b^2 \cdot w^2}{12} = \frac{\alpha \cdot A^2}{12} \quad (7)$$

Uvrštavanjem izraza (7) u izraz (5) te izdvajanjem slobodne varijable na lijevoj strani izraza:

$$A \geq \left(\frac{12 \cdot F \cdot L^2}{\alpha \cdot \pi^2 \cdot E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Eliminacijom slobodne varijable iz funkcije cilja (1) tj. uvrštavanjem izraza (8) u izraz (1):

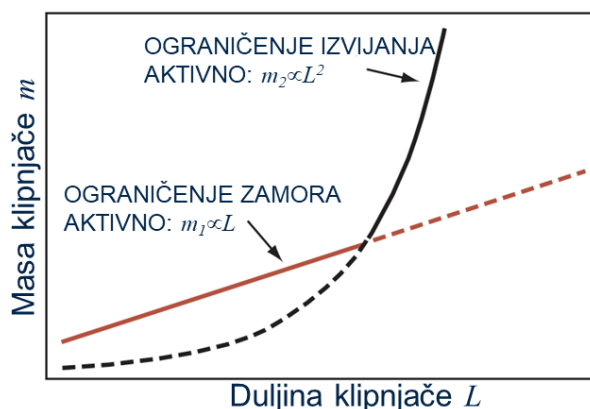
$$m_2 = \beta \cdot \left(\frac{12 \cdot F}{\alpha \cdot \pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L^2 \cdot \left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (9)$$

Najbolji materijali imaju minimalnu vrijednost indeksa materijala:

$$M_2 = \frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

Da bi klipnjača bila sigurna, mora zadovoljiti oba ograničenja. Za zadanu duljinu L , aktivno ograničenje je ono koje daje veću vrijednost mase tj. $\max(m_1, m_2)$. Problem se može riješiti tablično za ograničeni broj raspoloživih materijala ili grafički za sve materijale.

Na slici 3.1 je prikazana ovisnost mase o duljini klipnjače tj. grafički prikaz izraza (3) i izraza (9).



Slika 3.1 Ovisnost mase o duljini klipnjače

Izbor materijala klipnjače iz ograničenog broja raspoloživih materijala prikazan je u tablici 3.3.

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dimenzija klipnjače:

$$L = 200 \text{ mm} \quad F = 50 \text{ kN} \quad \alpha = 0,8 \quad \beta = 1,5$$

u izraze (3) i (9) dobiju se vrijednosti masa m_1 i m_2 prikazane u tablici

Tablica 3.3 Izbor materijala primjenom „min-max“ metode

Materijal	ρ kg/m ³	E GPa	R_d MPa	m_1 kg	m_2 kg
Nodularni lijev	7150	178	250	<u>0.43</u>	0.22
Brzorezni čelik HSLA 2120	7850	210	590	0.20	<u>0.23</u>
Aluminijeva legura za lijevanje S355.0	2700	70	95	<u>0.43</u>	0.14
Duralkan - Al-SiC kompozit	2880	110	230	<u>0.19</u>	0.11
Legura titana 6Al 4V	4400	115	530	0.12	<u>0.17</u>

Iz tablice se vidi da je za tri materijala aktivno ograničenje zamor materijal, a za dva izvijanje. Materijal koji pruža mogućnost izrade najlaganije klipnjače za ovaj slučaj je legura titana, dok je kompozit duralkan vrlo blizu na drugom mjestu.

Ova metoda izbora nije najbolja jer pretpostavlja pred selekciju i sužavanje mogućnosti izbora bez objašnjenja kako je pred selekcija izvršena – (predselektirani materijali utječu na najpovoljniji izbor).

Drugi problem je što dobiveni rezultat vrijedi samo za zadane vrijednosti opterećenja F i duljine klipnjače L . Promjena ovih vrijednosti mijenja izbor. Masa klipnjače koja će zadovoljiti s

aspekta dinamičke izdržljivosti i izvijanja je veća vrijednost mase m_1 i m_2 . Izjednačavanjem izraza (3) i (9) za mase m_1 i m_2 slijedi:

$$m_1 = m_2$$

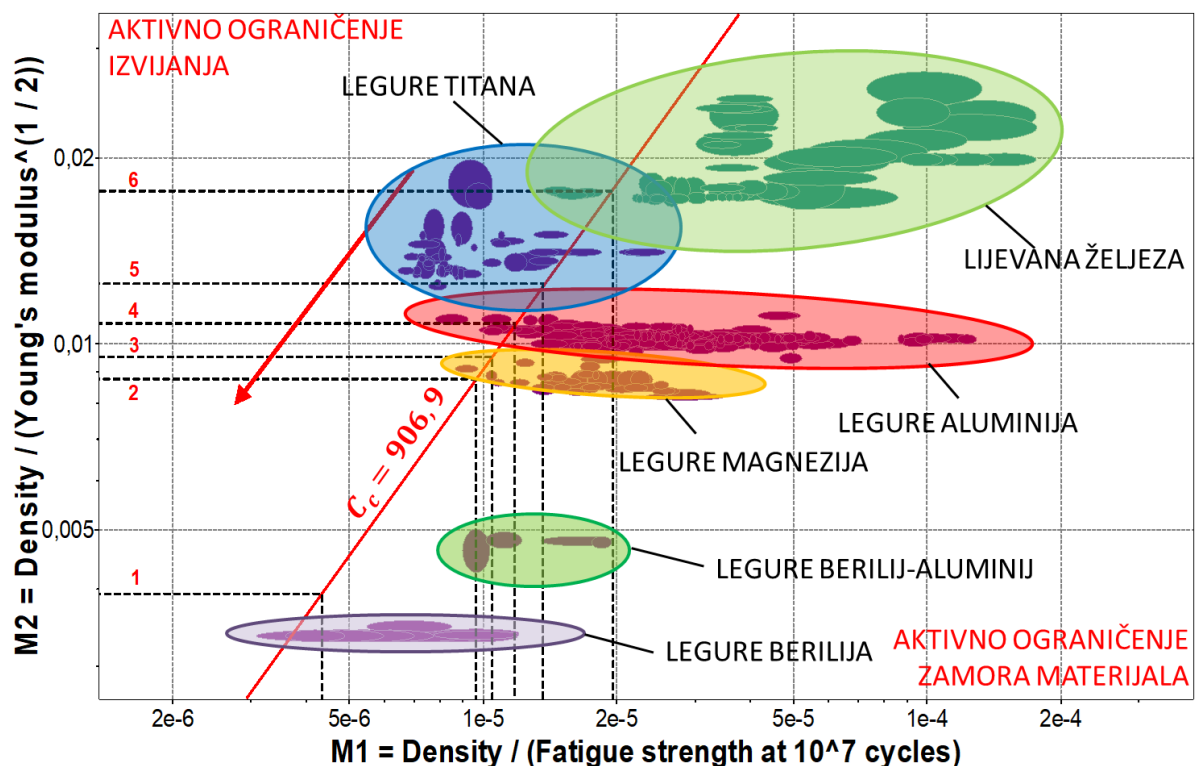
$$M_2 = \left[\left(\frac{\alpha \cdot \pi^2}{12} \cdot \frac{F}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot M_1 = C_c \cdot M_1 \quad (11)$$

Iz gornjeg izraza može se odrediti brojčana vrijednost spojne konstante C_c :

$$C_c = \left[\left(\frac{\alpha \cdot \pi^2}{12} \cdot \frac{F}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \left[\left(\frac{0,8 \cdot \pi^2}{12} \cdot \frac{50000}{0,2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 906,9 \quad (12)$$

Izračunata vrijednost spojne konstante vrijedi samo za dijagram u SI mjernim jedinicama jer su sve vrijednosti u izrazu (12) uvrštene u SI jedinicama.

Najbolji materijali određuju se u dijagramu svojstava materijala u kojem su indeksi koordinatne osi u logaritamskom mjerilu prikazanom na slici 3.2. U dijagramu je ucrtana spojnica za vrijednost spojne konstante $C_c = 906,9$. Na spojnici je prikazano ukupno šest okvira za izbor numeriranih brojkama 1 - 6. Okvir 1 obuhvaća najučinkovitije materijale (legure berilija), okvir 2 obuhvaća nešto manje učinkovite, ali jeftinije legure berilij-aluminij. Okvir 3 obuhvaća legure magnezija, 4 legure aluminija, 5 legure titana te okvir 6 najmanje učinkovita lijevana željeza.



Slika 3.2 Dijagram materijala „ $\log M_1 - \log M_2$ “

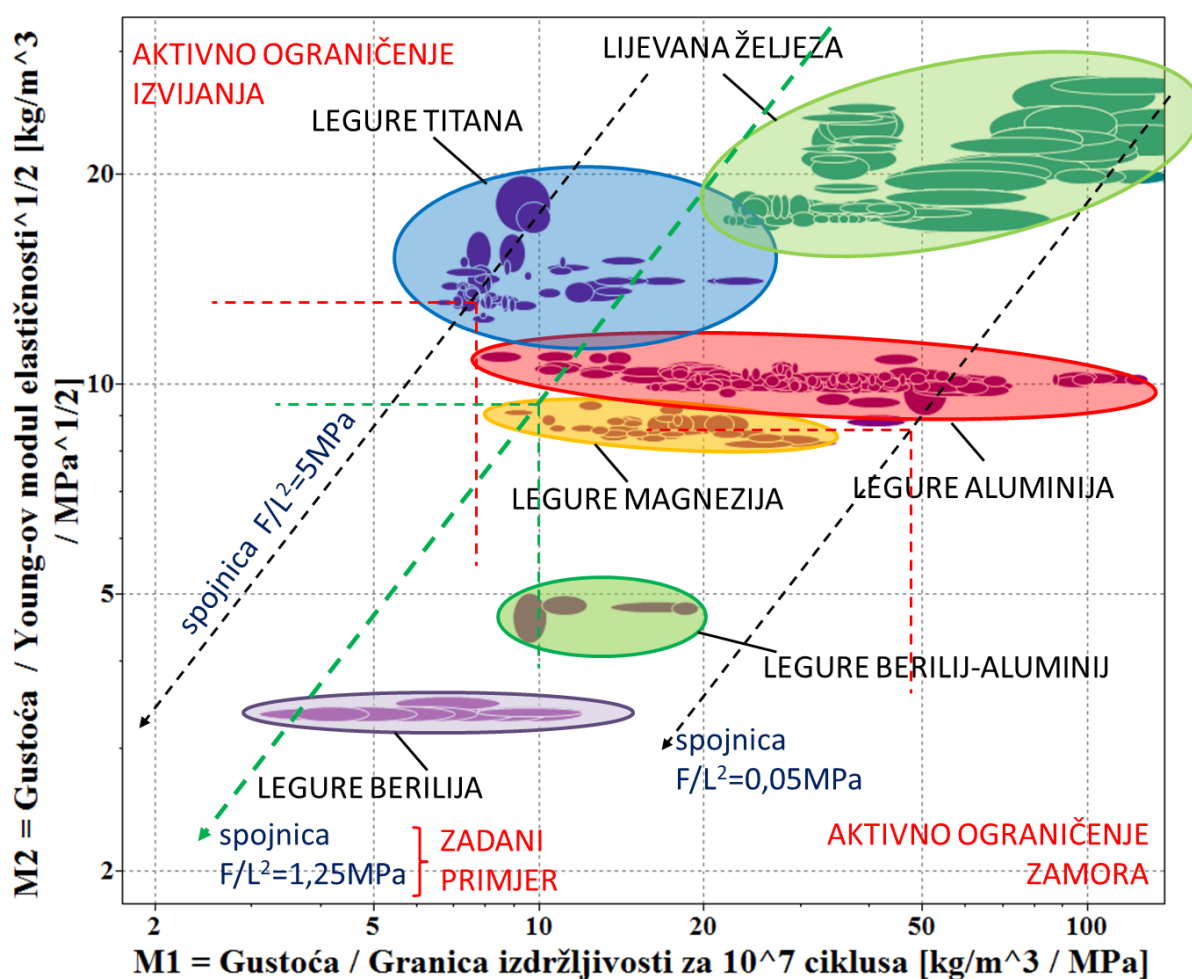
Logaritmiranjem izraza $M_2 = C_c \cdot M_1$:

$$\log M_2 = 1 \cdot \log M_1 + \log C_c \quad (13)$$

Izraz (13) je jednačba pravca (spojnice) nagiba „1“ u dijagramu „ $\log M_1 - \log M_2$ “.

Omjer $\frac{F}{L^2}$ u izrazu (12) naziva se „strukturni koeficijent opterećenja“.

Mijenjajući strukturne koeficijente F/L^2 dobije se familija paralelnih linija - spojnice (slika 3.3). U dijagramu na slici korištena je samo baza podataka za lake metale i lijevana željeza. Najbolji materijali se dobiju postavljanjem vrha okvira na spojnici i povlačenjem prema ishodištu dok se u okviru ne zadrži mala grupa materijala.



Slika 3.3 Dijagram materijala „ $\log M_1 - \log M_2$ “ sa spojnicama za različite strukturne koeficijente

U tablici 3.4 je dan sažeti prikaz najboljih materijala za različite vrijednosti strukturnih koeficijenata.

Tablica 3.4 Najbolji materijali za različite strukturne koeficijente opterećenja

Materijal	Komentar
Legure magnezije	Dobre sveukupne performanse
Legure titana	Ti-6Al-4V – dobar izbor za visoke strukturne koeficijente
Legure berilija	Najbolji izbor, komplicirana proizvodnja i vrlo skup materijal
Legure aluminija	Jeftiniji od titana i magnezija, nešto lošijih performansi

Vidi se da je praktički za bilo koju veličinu strukturnog koeficijenta optimalan materijal berilij i legure berilija i aluminija (preskupo rješenje). Iz dijagrama se lako može odrediti da je, za manje strukturne koeficijente opterećenja ($F/L^2=1,25$ i $F/L^2=0,05$) ako se izuzme berilij i legure berilija, optimalan izbor legura magnezija. Za veći strukturni koeficijent npr. $F/L^2=5$ optimalan izbor je legura titana.

3.1.2 Zadatak 2 – Lagana tlačna posuda

Zadatak

Koji je materijal najbolji za izradu lagane posude pod tlakom? Sferična posuda radijusa R je određen projektnim zahtjevom. Posuda mora podnositi pritisak p bez tečenja materijala ili trenutnog loma. Tlačna posuda mora biti što laganija.



1. Primjenom „min-max” metode (pukotina u središtu presjeka max. karakteristične duljine $a = 1$ mm, $R = 1000$ mm, $p = 5$ bar) izabrati najbolji od materijala ponuđenih u tablici 3.5

Tablica 3.5 Materijali za izradu tlačnog spremnika

Materijal	ρ kg/m ³	R_p , MPa	K_{Ic} , MPa·m ^{1/2}
Niskolegirani čelik, AISI 9255	7850	1100	54
Aluminij, 2090, T83	2610	440	40
Nehrđajući čelik, AISI 302	7900	410	140
Legura titana 6Al 4V	4400	1060	91

2. Odrediti „spojnu konstantu”, te u dijagramu svojstava materijala odrediti najbolje materijale primjenom „spojnice” i „okvira za odabir” !

Rješenje

Zahtjevi dizajna za laku tlačnu posudu sažeti su u tablici 3.6.

Ograničenja ukazuju na „min-max” problem s dva aktivna ograničenja.

Masa tankostijene sferične posude je:

$$m = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot t \cdot \rho \quad (1)$$

gdje je: t – debljina stijenke posude

ρ – gustoća materijala

Masa je funkcija cilja – veličina koju treba minimizirati.

Tablica 3.6 Tablica sa zahtjevima dizajna za laku tlačnu posudu

Zahtjevi dizajna za laku sferičnu tlačnu posudu	
FUNKCIJA	Tlačna posuda
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Određen radijus sferične posude R; - Maksimalni tlak p: Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje 1. Ne smije doći do pojave tečenja materijala pri tlaku p 2. Ne smije doći do pojave trenutnog loma uslijed oštrog koncentrata naprezanja
CILJ	Minimalizacija cijene
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Debljina stijenke t

1. Primjena „MIN-MAX“ metode

Ograničenje 1 – čvrstoća

Maksimalno naprezanje koje se javlja u stijenki tlačne posude je:

$$\sigma_{max} = \sigma_t = \frac{p \cdot R}{2 \cdot t} < R_p \quad (2)$$

Slobodna varijabla je debljina stijenke t pa se izraz (2) uređuje na slijedeći način:

$$t > \frac{p \cdot R}{2 \cdot R_p} \quad (3)$$

Eliminacijom slobodne varijable tj. uvrštavanjem izraza (3) u izraz (1) slijedi:

$$m_1 > 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot p \cdot \left(\frac{\rho}{R_p} \right) \quad (4)$$

Indeks materijala za prvo ograničenje je:

$$M_1 = \frac{\rho}{R_p} \quad (5)$$

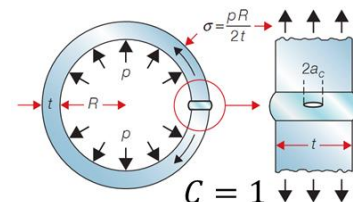
Ograničenje 2 – lomna žilavost

Lomna žilavost materijala dana je izrazom:

$$K_{1c} = C \cdot \sigma_f \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c^*} \quad (6)$$

Za pukotinu u središtu zavora konstanta $C = 1$.

Uvjet koji mora biti zadovoljen da ne dođe do loma, uslijed postojanja oštrog koncentrata napreznja, je da maksimalno napreznja koje se javlja u zavaru mora biti manje od kritičnog napreznja:



$$\sigma < \sigma_f = \frac{K_{1c}}{C \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c^*}} \quad (7)$$

Napreznja koje se javlja u zavaru sferičnog spremnika je:

$$\sigma = \frac{p \cdot R}{2 \cdot t} \quad (8)$$

Kombinacijom izraza (7) i (8) te izdvajanjem slobodne varijable na lijevu stranu izraza:

$$t > \frac{p \cdot R \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c^*}}{2 \cdot K_{1c}} \quad (9)$$

Eliminacijom slobodne varijable iz funkcije cilja (1) tj. uvrštavanjem izraza (9) u izraz (1):

$$m_2 > 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot p \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c^*} \cdot \left(\frac{\rho}{K_{1c}} \right) \quad (10)$$

Indeks materijala za drugo ograničenje je:

$$M_2 = \frac{\rho}{K_{1c}} \quad (11)$$

Zadane dimenzije spremnika su: $R = 1000 \text{ mm}$ $a_c^* = 1 \text{ mm}$ $p = 5 \text{ bar}$

Uvrštavanjem u jednadžbe cilja za oba ograničenja dobivaju se vrijednosti potrebne za primjenu „min-max“ metode (tablica 3.7).

Tablica 3.7 Primjena „min-max“ metode za izbor materijala lakog tlačnog spremnika

Materijal	ρ kg/m ³	R_p GPa	K_{1c} MPa·m ^{1/2}	m_1 kg	m_2 kg	$m_s = \max(m_1, m_2)$ kg
Niskolegirani čelik, AISI 9255	7850	1100	54	22.4	25.5	25.5
Aluminij, 2090, T83	2610	440	40	18.6	11.4	18.6
Nehrđajući čelik, AISI 302	7900	410	140	60.5	9.9	60.5
Legura titana 6Al 4V	4400	1060	91	13.0	8.5	13.0
						13.0

2. Izbor materijala primjenom dijagrama materijala, spojnice i okvira za izbor

Izjednačavanjem izraza (4) i (10) za masu primjenom prvog i drugog ograničenja slijedi:

$$m_1 = m_2 \quad (11)$$

$$2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot p \cdot \left(\frac{\rho}{R_p}\right) = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot p \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c^*} \cdot \left(\frac{\rho}{K_{1c}}\right) \quad (12)$$

$$2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot p \cdot M_1 = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot p \cdot \sqrt{\pi \cdot a_c^*} \cdot M_2 \quad (13)$$

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_c^*}} \cdot M_1 = C_c \cdot M_1 \quad (14)$$

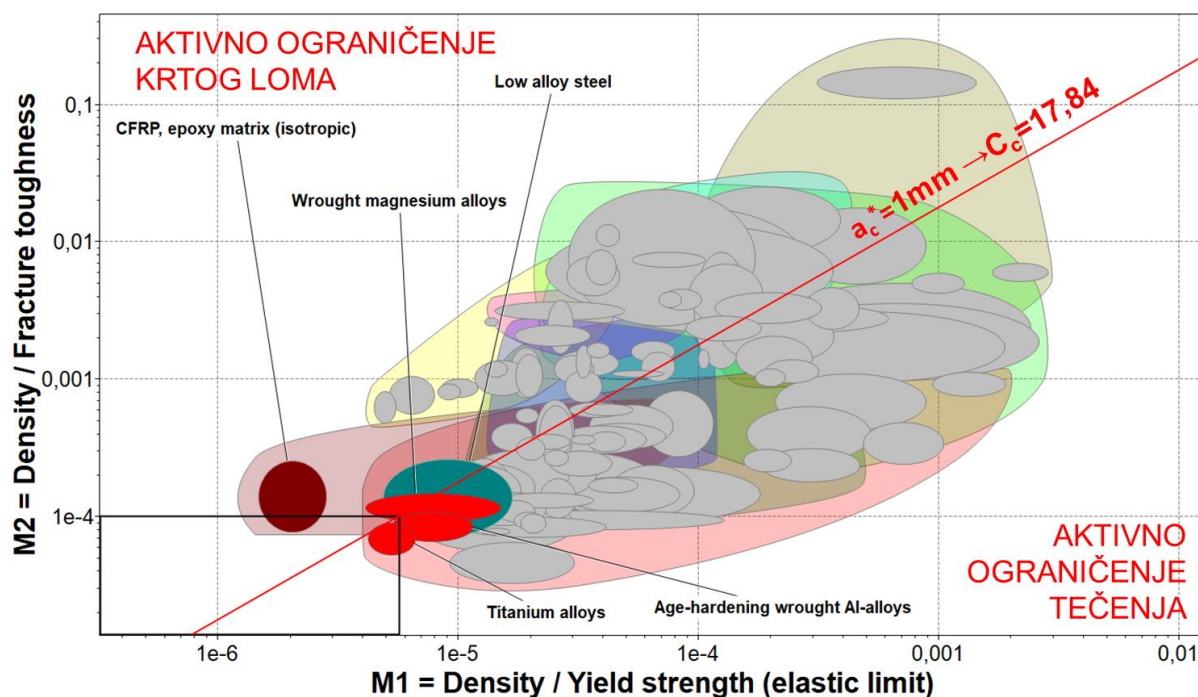
Odavde je spojna konstanta C_c :

$$C_c = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_c^*}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 0.001}} = 17,84 \quad (15)$$

Logaritmiranjem izraza (14) dobije se jednadžba pravca u dijagramu materijala kojemu su osi indeksi materijala M_1 i M_2 u logaritamskom mjerilu:

$$\log M_2 = 1 \cdot \log M_1 + \log 17,84 \quad (16)$$

U dijagramu (slika 3.4) je ucrtana spojnica za spojnu konstantu $C_c = 17,84$ za veličinu središnje pukotine $2 \cdot a_c = 2$ mm.



Slika 3.4 Dijagram materijala „ $\log M_1 - \log M_2$ “ sa ucrtanom spojnicom $C_c = 17,84$ i okvirom za izbor materijala

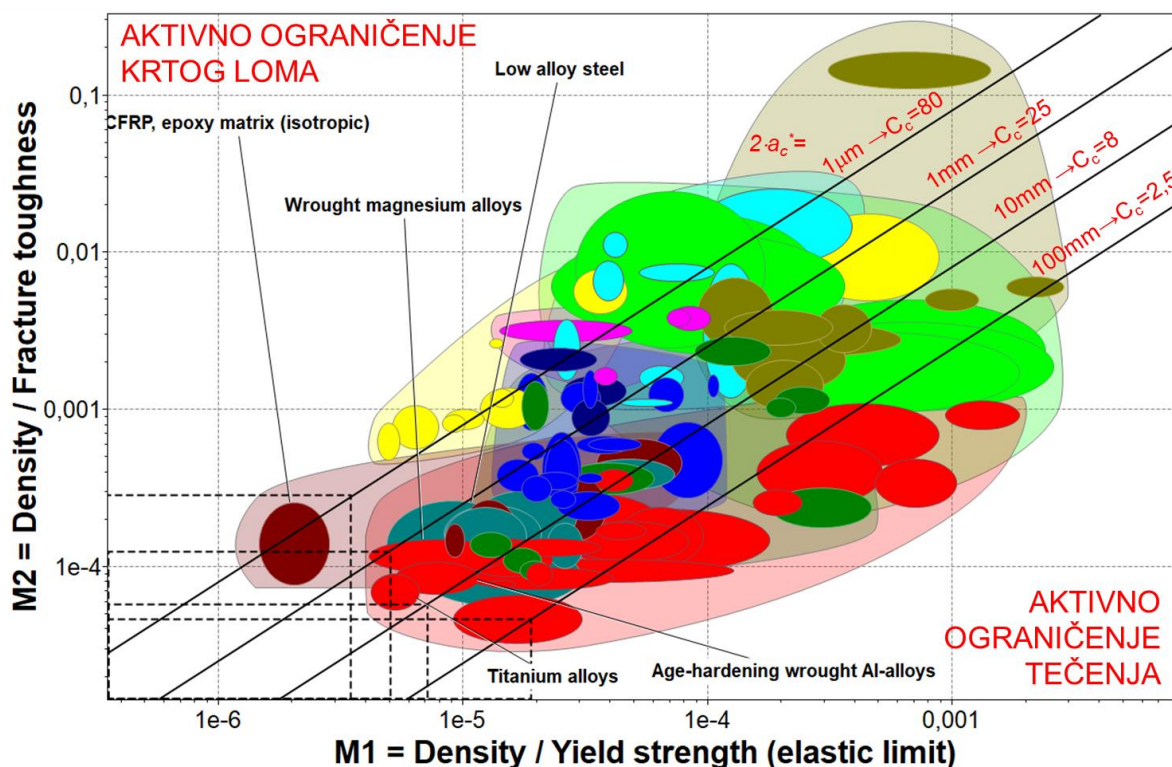
Materijali koji su najbolji izbor sa odgovarajućim indeksima prikazani su u tablici 3.8.

Tablica 3.8 Najbolji materijali za izradu tlačnog spremnika

Naziv materijala	M_1	M_2
CFRP, epoxy matrix (isotropic)	$2,04e-6$	$1,4e-4$
Titanium alloys	$5,27e-6$	$6,93e-5$
Age-hardening wrought Al-alloys	$7,78e-6$	$8,48e-5$
Wrought magnesium alloys	$7,88e-6$	$1,16e-4$
Low alloy steel	$9e-6$	$1,38e-4$

Za materijale koji se nalaze iznad spojnice aktivno ograničenje je lomna žilavost, dok je za materijale koji se nalaze ispod spojnice aktivno ograničenje čvrstoća materijala.

U dijagramu na slici 3.5 prikazane su spojnice s pripadajućim okvirima za izbor za različite dimenzije središnje pukotine od $1\ \mu\text{m}$ do $100\ \text{mm}$. Očito je da se za različite veličine pukotine najbolji izbor materijala se mijenja.



Slika 3.5 Dijagram svojstava materijala s ucrtanom spojnicama za duljine pukotina 1 μm do 100 mm

Kratki osvrt za najbolje materijale za različite dimenzije kritične pukotine dan je u tablici 3.9.

Tablica 3.9 Najbolji materijali za različite veličine kritične pukotine

$2 \cdot a_c^*$	Materijal	Komentar
100 μm	CFRP	Skupo, niska tolerancija na greške
1 – 10 mm	Legure titana	Skupo rješenje
100 mm	Nisko legirani čelik	Jeftino rješenje, visoke tolerancije na greške

3.1.3 Zadatak 3 – Materijal za pokrov bazena

Zadatak

Izvršiti izbor laganog i krutog pokrova bazena (slika 3.6) dimenzija 10 x 5 m. Progib u središnjem dijelu pokrova ne smije biti veći od $\delta_{dop} = 10$ mm. Ploča mora zadovoljiti i kriterij čvrstoće uz faktor sigurnosti $S = 1,5$.

Kako ne bi došlo do loma, lomna žilavost ploče mora biti $K_{1C} \geq 20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$. Materijal mora imati izvrsnu otpornost u morskoj atmosferi i izvrsnu otpornost na UV zračenje. Pretpostaviti da je ploča kontinuirno opterećena ukupnom masom od $m = 2000 \text{ kg}$, te da je oslonjena na dva oslonca na kraćem rasponu (5 m).



Slika 3.6 Lagani pokrov bazena

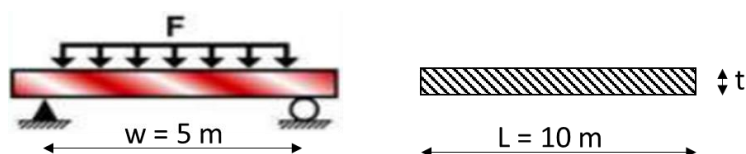
Rješenje

Zahtjevi dizajna za lagani pokrov bazena sažeti su u tablici 3.10.

Tablica 3.10 Tablica sa zahtjevima dizajna za lagani i kruti pokrov bazena

Zahtjevi dizajna za laku i kruti pokrov bazena	
FUNKCIJA	Kruti pokrov bazena
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Širina $w = 5 \text{ m}$ - Kontinuirano opterećenje ($F = 2000 \cdot 9,81 = 19620 \text{ N}$) - Izvrsna otpornost u morskoj atmosferi - Izvrsna otpornost na UV zračenje Limitirajuća ograničenja - Lomna žilavost $K1C \geq 20 \text{ Mpa} \cdot \text{m}^{1/2}$ Aktivno ograničenje 1. Savojna krutost $\delta < \delta_{dop}$ 2. Ne smije doći do oštećenja pri opterećenju $\sigma < \sigma_{dop}$ uz faktor sigurnosti $S = 1,5$
CILJ	Minimalizacija mase
SLOBODNE VARIABLE	Izbor materijala Površina poprečnog presjeka A

Pokrov bazena se može promatrati kao ploča jednostavno oslonjena na svojim krajevima i opterećena koncentriranim opterećenjem u središtu ploče prema slici 3.7.



Slika 3.7 Pojednostavljena skica učvršćenja i opterećenja krutog pokrova za bazen
Cilj je izrada laganog pokrova koji je pojednostavljen kao ploča čija je masa:

$$m = w \cdot L \cdot t \cdot \rho \quad (1)$$

1. OGRANIČENJE – SAVOJNA KRUTOST

Maksimalni progib pokrova bazena (ploče) se može odrediti prema izrazu preuzetom iz Priručnika:

$$\delta = \frac{F \cdot L^3}{C_1 \cdot E \cdot I} \leq \delta_{dop} \quad (2)$$

gdje je I aksijalni moment inercije ploče:

$$I = \frac{w \cdot t^3}{12} \quad (3)$$

Kombinacijom izraza (2) i izraza (3) te izdvajanjem slobodne varijable (debljina stijenke t) na lijevu stranu izraza slijedi:

$$t \geq \left(\frac{12 \cdot F \cdot L^3}{C_1 \cdot \delta_{dop} \cdot E \cdot w} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

Eliminacijom slobodne varijable t iz izraza za funkciju cilja (1) tj. uvrštavanjem izraza (4) u izraz (1):

$$m_1 \geq \left(\frac{12 \cdot F}{C_1 \cdot \delta_{dop}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(w^{\frac{2}{3}} \cdot L^2 \right) \cdot \left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}} \right) \quad (5)$$

Indeks materijala za izbor pokrova minimalne mase uz ograničenje krutosti (ujedno i os apscisa u dijagramu svojstava materijala za izbor) je:

$$M_1 = \frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}} \quad (5)$$

2. OGRANIČENJE – ČVRSTOĆA

Maksimalno naprezanje koje se javlja u materijalu pokrova mora biti manje od dopuštenog naprezanja:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} \leq \sigma_{dop} = \frac{R_p}{S} \quad (6)$$

Korištenjem priručnika lako se može odrediti maksimalni moment za dizajn učvršćenja i opterećenja ploče prema slici Slika 3.7:

$$M_{y,max} = \frac{F \cdot L}{8} \quad (7)$$

Aksijalni moment otpora presjeka je:

$$W_y = \frac{w \cdot t^2}{6} \quad (8)$$

Kombinacijom izraza (6), (7) i (8) te izdvajanjem slobodne varijable t na lijevu stranu izraza slijedi:

$$t \geq \left(\frac{6 \cdot F \cdot L \cdot S}{C_2 \cdot w \cdot R_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Eliminacijom slobodne varijable t iz izraza za funkciju cilja (1) tj. uvrštavanjem izraza (9) u izraz (1):

$$m_2 \geq \left(\frac{6 \cdot F \cdot S}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(w^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\rho}{R_p^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (10)$$

Indeks materijala za izbor pokrova minimalne mase uz ograničenje čvrstoće (ujedno i os ordinata u dijagramu svojstava materijala za izbor) je:

$$M_2 = \frac{\rho}{R_p^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

Izjednačavanjem funkcije cilja za ograničenje krutosti (5) i funkcije cilja za ograničenje čvrstoće (10):

$$m_1 = m_2$$

$$\left(\frac{12 \cdot F}{C_1 \cdot \delta_{dop}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(w^{\frac{2}{3}} \cdot L^2 \right) \cdot M_1 = \left(\frac{6 \cdot F \cdot S}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(w^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} \right) \cdot M_2$$

$$M_2 = \frac{\left(\frac{12 \cdot F}{C_1 \cdot \delta_{dop}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(w^{\frac{2}{3}} \cdot L^2 \right)}{\left(\frac{6 \cdot F \cdot S}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(w^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} \right)} \cdot M_1 \quad (12)$$

$$M_2 = C_C \cdot M_1$$

Iz izraza (12) slijedi da je spojna konstanta:

$$C_C = \frac{\left(\frac{12 \cdot F}{C_1 \cdot \delta_{dop}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(w^{\frac{2}{3}} \cdot L^2 \right)}{\left(\frac{6 \cdot F \cdot S}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(w^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} \right)} = \frac{\left(\frac{12 \cdot 19620}{385 \cdot 0,01} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{5^3} \cdot 10^2 \right)}{\left(\frac{6 \cdot 19620 \cdot 1,5}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5^2} \cdot 10^{\frac{3}{2}} \right)} = 1.9 \quad (13)$$

$$M_2 = 1,9 \cdot M_1 \quad (14)$$

Prvi korak izbora materijala primjenom programa „GRANTA EduPack“ je unos jednostavnih i limitirajućih ograničenja prema slici 3.8. Za izbor se koristila reducirana baza podataka – nivo 2 koja sadrži samo 100 materijala.

▼ Mechanical properties			
	Minimum	Maximum	
Young's modulus			GPa
Shear modulus			GPa
Bulk modulus			GPa
Poisson's ratio			
Yield strength (elastic limit)			MPa
Tensile strength			MPa
Compressive strength			MPa
Elongation			% strain
Hardness - Vickers			HV
Fatigue strength at 10 ⁷ cycles			MPa
Fracture toughness	20		MPa.m ^{0.5}
Mechanical loss coefficient (tan delta)			

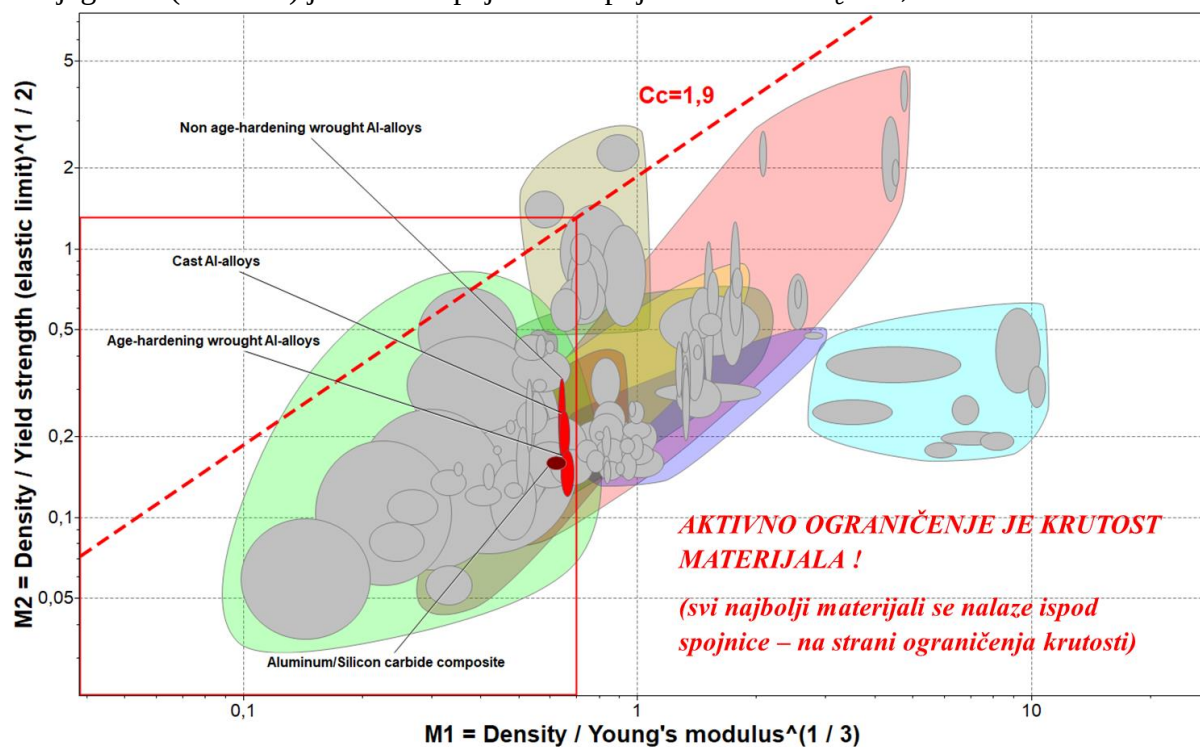
▼ Durability: built environments	
Industrial atmosphere	
Rural atmosphere	
Marine atmosphere	Excellent
UV radiation (sunlight)	Excellent

Slika 3.8 Jednostavna i limitirajuća ograničenja

Logaritmiranjem izraza (14) dobije se jednačba pravca u dijagramu materijala kojemu su osi indeksi materijala M_1 i M_2 u logaritamskom mjerilu:

$$\log M_2 = 1 \cdot \log M_1 + \log 1,9 \quad (15)$$

U dijagramu (slika 3.9) je ucrtana spojnica za spojnu konstantu $C_c = 1,9$.



Slika 3.9 Dijagram materijala „ $\log M_1 - \log M_2$ “ sa ucrtanom spojnicom $C_c = 1,9$ i okvirom za izbor materijala

Rekapitulacija izbora materijala prikazana je u tablici 3.11. Napomene koje proizlaze iz detaljnijeg proučavanja najviše rangiranih materijala nisu unesene u prikazanu tablicu iz razloga jer je korištena previše mala baza materijala.

Tablica 3.11 Tablica s prikazanim najboljim materijalima za pokrov bazena

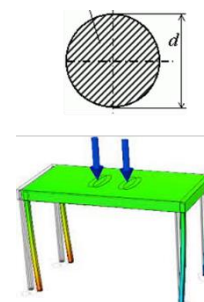
Naziv	ρ kg/m ³	R_p MPa	E GPa	$\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{\rho}{R_p^{\frac{1}{2}}}$	Napomena
Aluminum/Silicon carbide composite	2.66e3 - 2.9e3	280 - 324	81 - 100	0.586 - 0.655	0.151 - 0.169	
Non age- hardening wrought Al-alloys	2.63e3 - 2.7e3	65.1 - 25	69 - 74	0.631 - 0.654	0.168 - 0.33	
Cast Al-alloys	2.65e3 - 2.77e3	118 - 263	69 - 76	0.633 - 0.668	0.167 - 0.25	
Age-hardening wrought Al-alloys	2.67e3 - 2.84e3	241 - 520	68 - 76	0.639 - 0.686	0.121 - 0.178	

4 IZBOR MATERIJALA U SLUČAJU JEDNOG OGRANIČENJA I VIŠE CILJEVA

4.1.1 Zadatak 1 – Lake i vitke nogice stolića

Zadatak

Nogice moraju biti punog presjeka (vitke), te što laganije. Nadalje, moraju podržavati masu staklene ploče i svega što se stavi na stolić bez pojave izvijanja. Ukoliko dođe do slučajnog udarca u stolić ne smije doći do loma nogice ($G_{1c} > 1 \text{ kJ/m}^2$). Koji je materijal najbolji za njihovu izradu?



Rješenje

U ovom problemu su sadržana dva suprotstavljena cilja:

- minimalna masa m i
- maksimalna vitkost.

Problem sadrži i dva ograničenja:

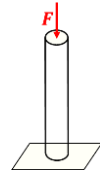
- otpornost na izvijanje R i
- dovoljna žilavost materijala kako ne bi došlo do loma, dakle $G_{1c} > 1 \text{ kJ/m}^2$

Zahtjevi dizajna su prikazani u tablici 4.1.

Tablica 4.1 Tablica sa zahtjevima dizajna za lagane i vitke nogice stolića

Zahtjevi dizajna za lake i vitke nogice stolića	
FUNKCIJA	Nogica stolića
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina nogice $L = 0,5 \text{ m}$ - Projektno opterećenje $F = 500 \text{ N}$ Limitirajuća ograničenja - Ne smije doći do loma uslijed slučajnog udarca $G_{1c} > 1 \text{ kJ/m}^2$ Aktivno ograničenje 1. Ne smije doći do izvijanja
CILJ	1. Minimalna masa nogica m 2. Maksimalna vitkost (minimalni radijus R)
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Radijus nogice R kada je cilj minimalna masa

Nogica stolića se promatra kao stup koji podržava tlačno opterećenje (obzirom da se traže vitke nogice ograničenje je elastična stabilnost).



Cilj je minimalizacija mase nogice (koja je pojednostavljenog valjkastog oblika):

$$m \geq \pi \cdot R^2 \cdot L \cdot \rho \quad (1)$$

Izraz za kritičnu silu za elastično izvijanje po Euleru preuzet je iz Priručnika:

$$F < F_{krit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad (2)$$

Aksijalni moment inercije (minimalni i maksimalni su jednaki za okrugli poprečni presjek) je također preuzet iz Priručnika:

$$I = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad (3)$$

Kombiniranjem izraza (2) i izraza (3) slijedi:

$$F_{krit} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot R^4}{4 \cdot L^2} \quad (4)$$

Uređenjem izraza (4) tako da se na lijevu stranu izluči slobodna varijabla (radijus R) dobije se funkcija 2. cilja:

$$R \geq \left[\frac{4 \cdot F}{\pi^3} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot [L]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{E} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (5)$$

Za drugi cilj indeks materijala je:

$$M_2 = \frac{1}{E} \quad (6)$$

Eliminacijom slobodne varijable iz izraza za funkciju 1. cilja (1) tj. uvrštavanjem izraza (5) u izraz (1):

$$m \geq \left[\frac{4 \cdot F}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [L]^2 \cdot \left[\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (7)$$

Odavde slijedi da je indeks materijala za 1. cilj:

$$M_1 = \frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

Za slučaj izbora materijala primjenom relativne funkcije optimizacije ciljeva kada se ciljevi minimiziraju indeksi materijala se dijele s indeksom referentnog materijala (materijala u odnosu na kojega se vrši usporedba ostalih materijala) osi dijagrama su:

$$\text{OS „x”}: \quad \frac{m}{m_0} = \frac{M_1}{M_{1,0}} = \frac{\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}}}{\frac{\rho_0}{E_0^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(\frac{E_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\text{OS „y”}: \quad \frac{R}{R_0} = \frac{M_2}{M_{2,0}} = \frac{\frac{1}{E}}{\frac{1}{E_0}} = \frac{E_0}{E} \quad (10)$$

Kao referentni materijal u ovom primjeru je odabrano drvo („*Hardwood: oak, along grain*”) svojstava:

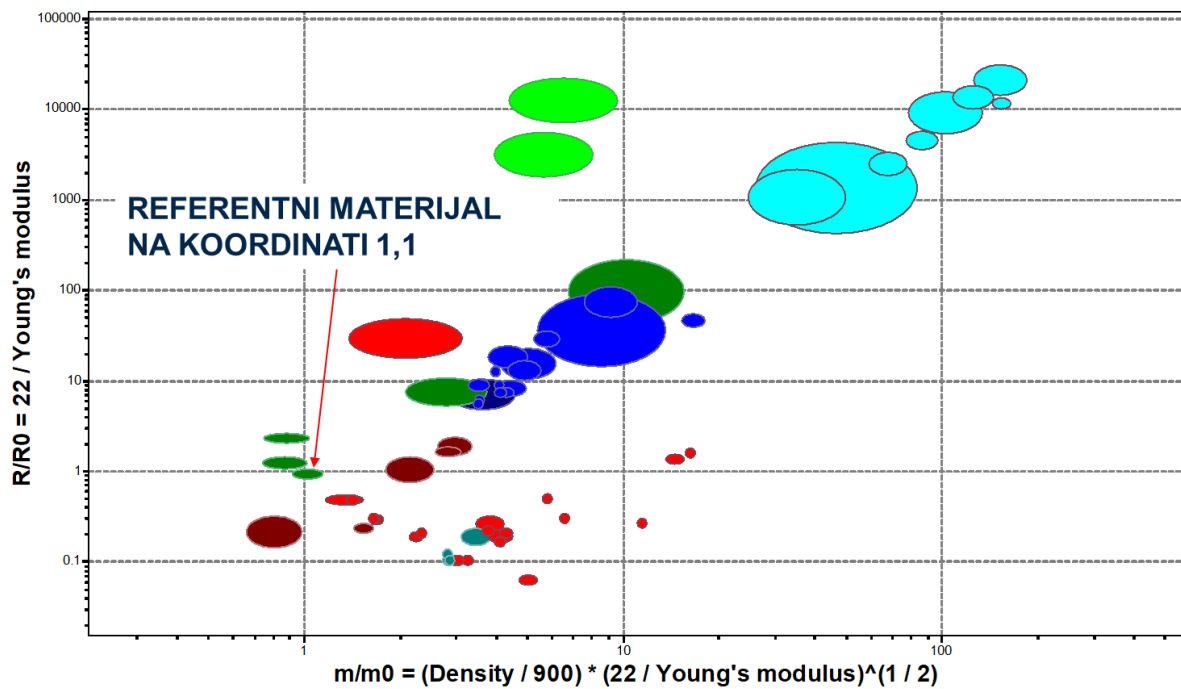
$$\rho_0 = \rho_{drva} = 900 \text{ kg/m}^3 \quad E_0 = E_{drva} = 22 \text{ GPa}$$

Kada se uvrste referentna svojstva u izraze (9) i (10) osi dijagrama su:

$$\text{OS „x”}: \quad \frac{m}{m_0} = \frac{\rho}{900} \cdot \left(\frac{22}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\text{OS „y”}: \quad \frac{R}{R_0} = \frac{22}{E} \quad (12)$$

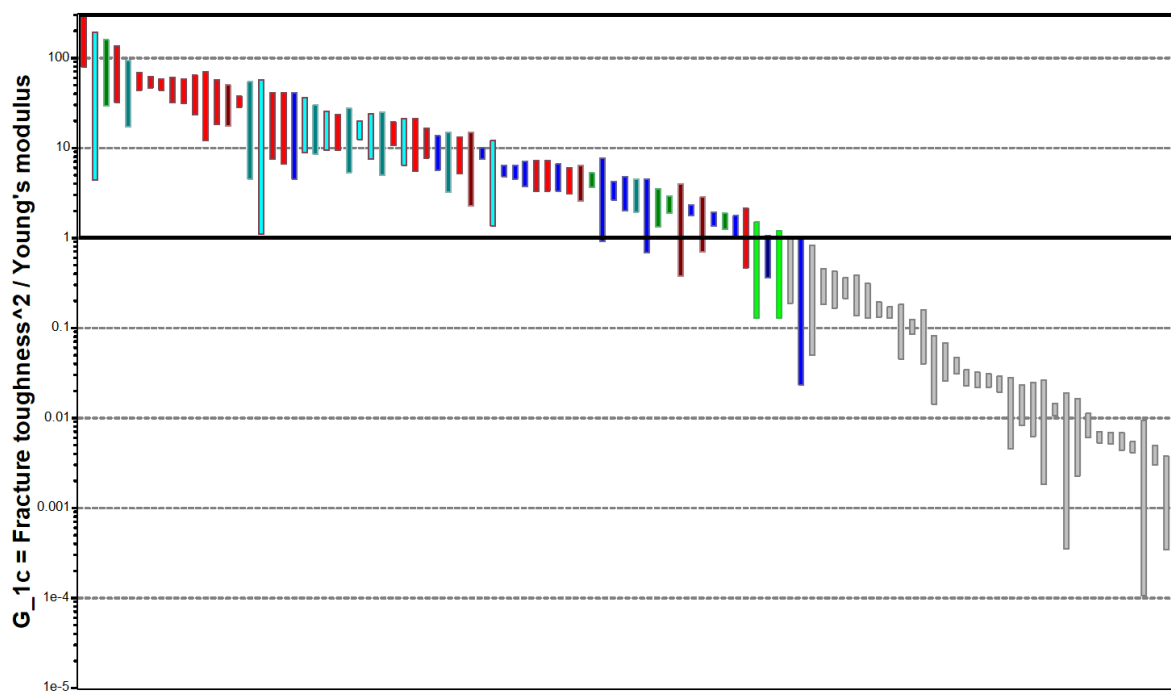
Na slici 4.1 je prikazan generirani dijagram materijala s osima prema izrazima (11) i (12). Za generiranje dijagrama je korišten 2. nivo baze podataka koji sadrži 100 materijala. Uočiti da je položaj referentnog materijala u dijagramu na koordinati (1, 1).



Slika 4.1 Dijagram materijala za izbor materijala za lake i vitke nogice stolića

Primjena ograničenja udarne žilavosti izvršena je primjenom trakastog dijagrama na slici 4.2. Ograničenje je realizirano korištenjem alata („*box selection*“) gdje je donji dio postavljen na vrijednost minimalno tražene udarne žilavosti, a gornji dio u vrhu dijagrama. Obzirom da svojstvo udarne žilavosti nije implementirano u korištenoj bazi podataka korišten je jednostavan izraz za izračunavanje udarne žilavosti materijala:

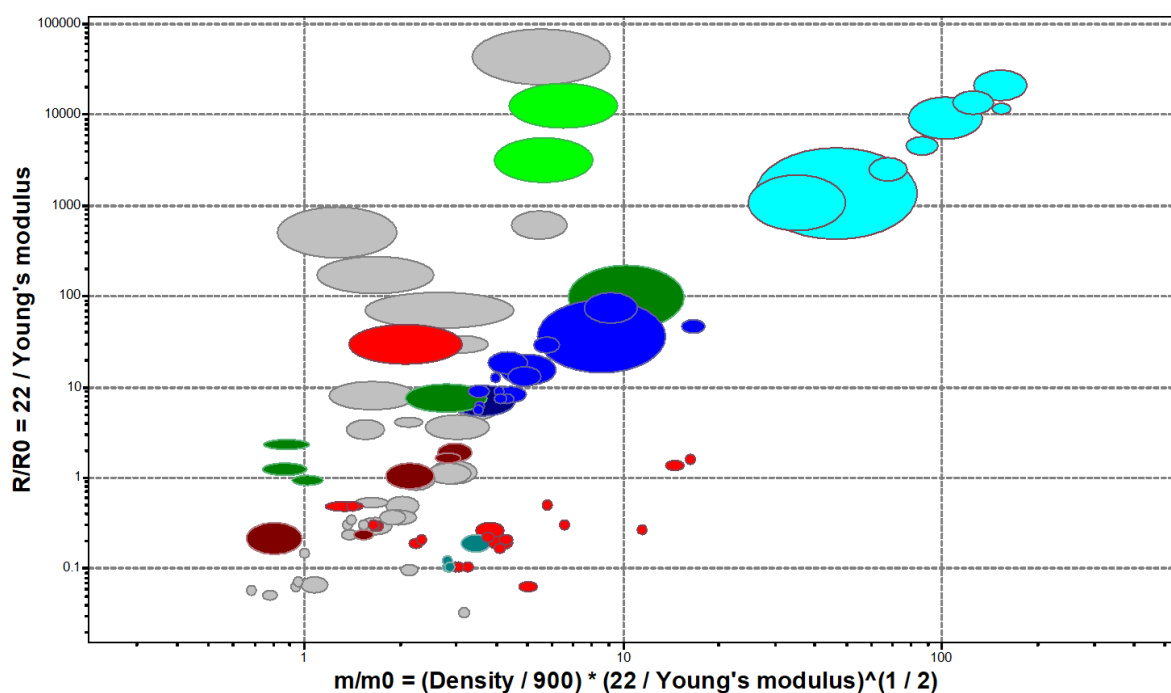
$$G_{1c} = \frac{K_{1c}^2}{E} \quad (13)$$



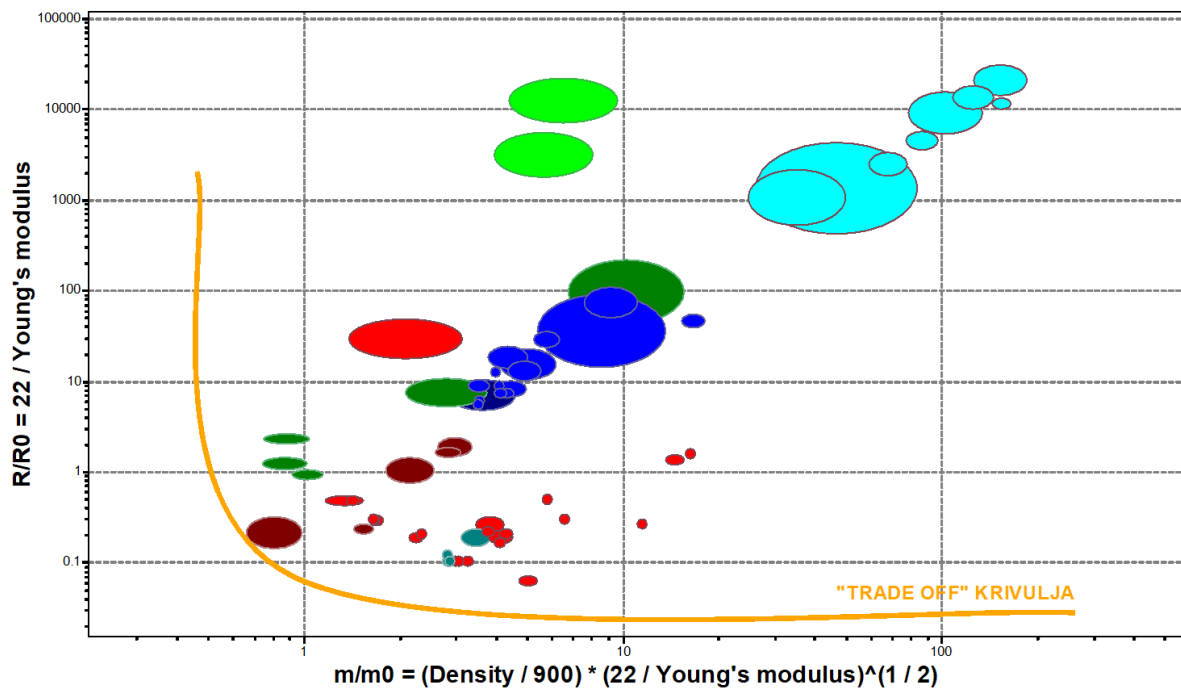
Slika 4.2 Primjena limitirajućeg ograničenja udarne žilavosti $G_{1c} > 1$ kJ/m²

Na slici 4.3 prikazan dijagram svojstava materijala s aktiviranim ograničenjem udarne žilavosti. Materijali označeni svim elipsama imaju udarnu žilavost manju od tražene tj. $G_{1c} < 1$ kJ/m².

U dijagramu na slici 4.4 prikazan je dijagram materijala u kojem su skriveni materijali koji ne zadovoljavaju limitirajuće ograničenje udarne žilavosti. U istom dijagramu je ucrтана i optimalna kompromisna krivulja („trade off“ krivulja) na način da sa lijeve i donje strane dijagrama obuhvaća sve materijale.



Slika 4.3 Dijagram materijala s aktiviranim limitirajućim ograničenjem $G_{1c} > 1$ kJ/m²



Slika 4.4 Dijagram materijala s ucrtanom „trade off“ krivuljom

S ciljem određivanja jedinstvenog rješenja formulira se funkcija optimizacije ciljeva izbora Z ili relativna funkcija optimizacije ciljeva izbora Z^* :

$$Z = \alpha_R \cdot R + \alpha_m \cdot m \quad \Rightarrow \quad Z = \alpha_R \cdot R \cdot \frac{R_0}{R_0} + \alpha_m \cdot m \cdot \frac{m_0}{m_0} \quad (13)$$

Sređivanje izraza (13) slijedi:

$$Z^* = (\alpha_R \cdot R_0) \cdot \frac{R}{R_0} + (\alpha_m \cdot m_0) \cdot \frac{m}{m_0} = \alpha_R^* \cdot \frac{R}{R_0} + \alpha_m^* \cdot \frac{m}{m_0} \quad (14)$$

Konačno, relativna funkcija optimizacije ciljeva je:

$$Z^* = \alpha_R^* \cdot \frac{R}{R_0} + \alpha_m^* \cdot \frac{m}{m_0} \quad (15)$$

gdje su $\frac{m}{m_0}$ i $\frac{R}{R_0}$ os x i os y u dijagramu svojstava materijala.

Ukoliko obje vrijednosti relativnih konstanti izjednačavanja imaju istu vrijednost (podjednako važni ciljevi):

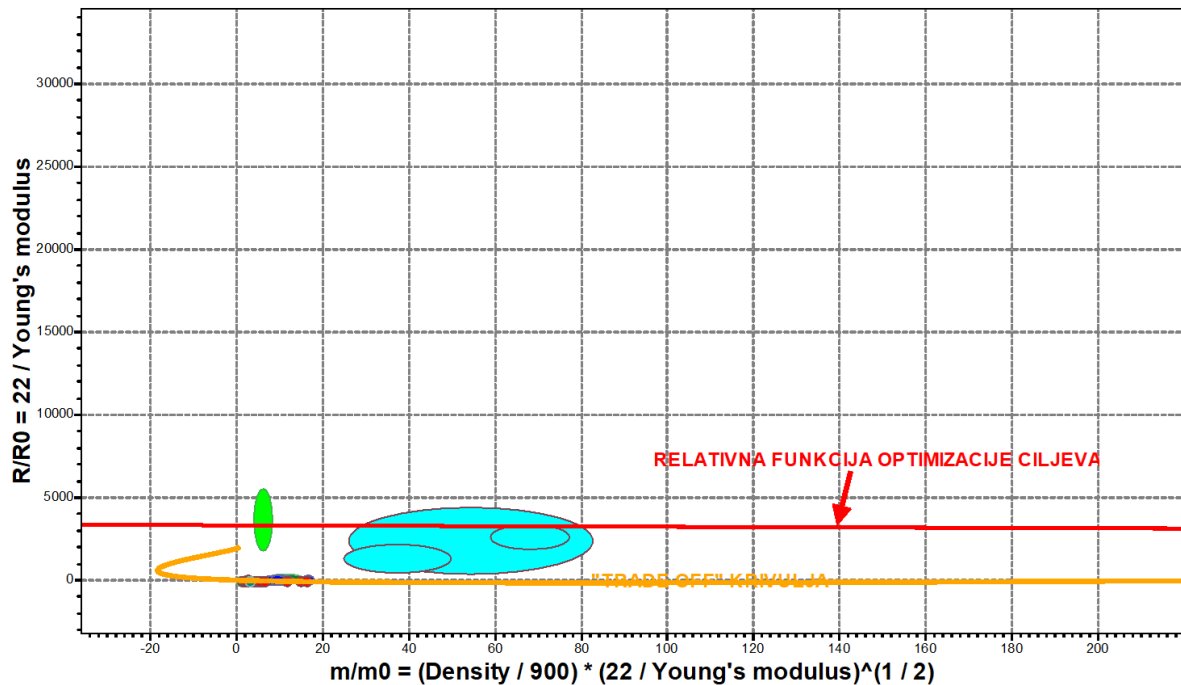
$$\alpha_R^* = \alpha_m^* \quad (16)$$

što znači da promjena i mase i radijusa vrijede podjednako.

Relativna funkcija optimizacije ciljeva u dijagramu materijala s linearnom mjernom skalom je pravac:

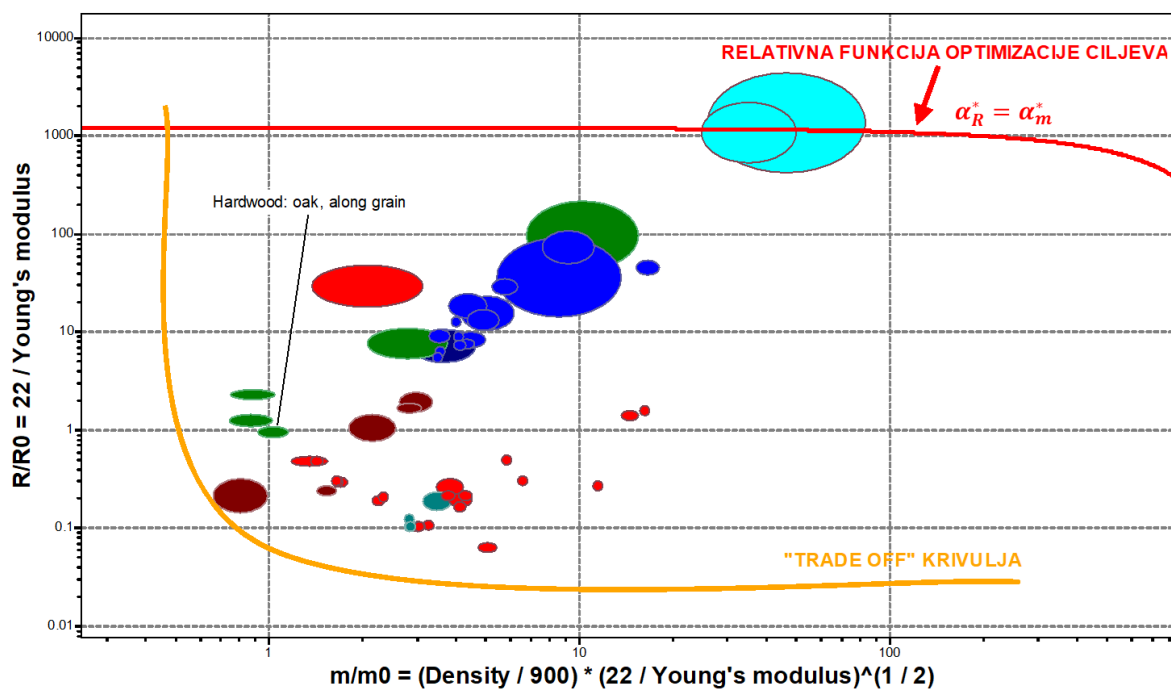
$$\frac{Z^*}{\alpha_m^*} = \frac{R}{R_0} + \frac{m}{m_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{R_0} = -1 \cdot \frac{m}{m_0} + \frac{Z^*}{\alpha_m^*} \quad (17)$$

U dijagramu s linearnim mjernim skalama relativna funkcija optimizacije ciljeva je jednačba pravca nagiba „-1” (slika 4.5).



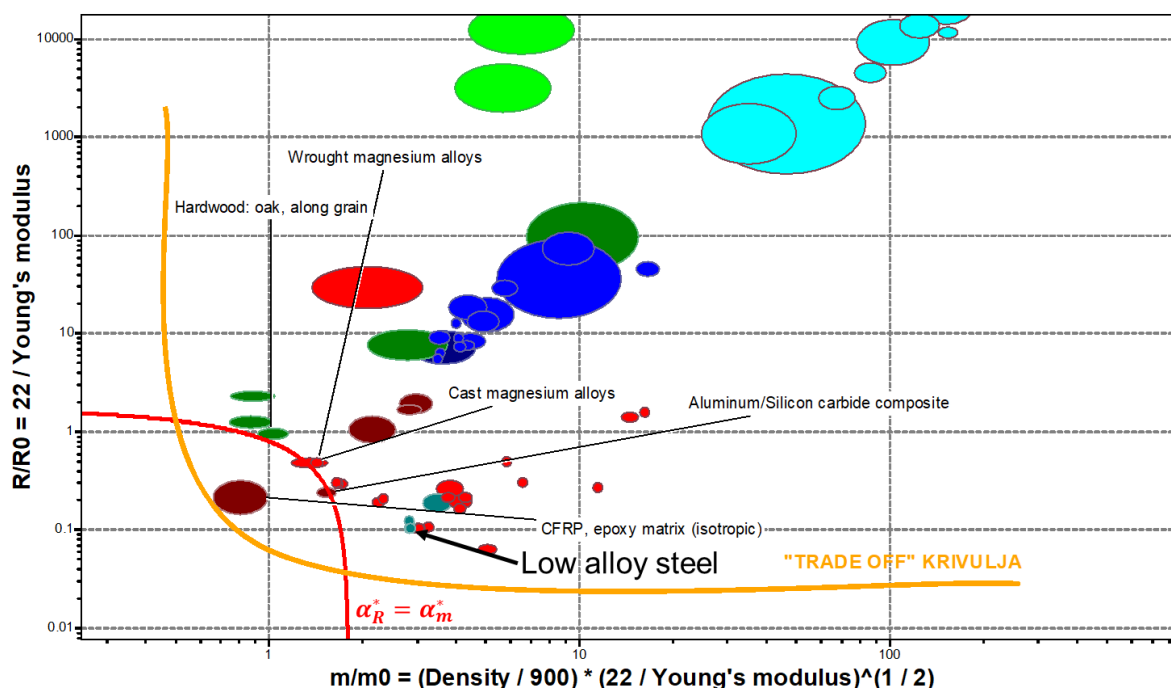
Slika 4.5 Dijagram materijala s linearnim mjernim skalama i ucrtanom Z^* funkcijom

Relativna funkcija optimizacije ciljeva u dijagramu materijala s linearnom mjernom skalom poprima oblik krivulje u dijagramu materijala s „log-log” mjernom skalom (slika 4.6).



Slika 4.6 Dijagram materijala s logaritamskom mjernom skalom – relativna funkcija optimizacija ciljeva sada postaje krivulja (crveno obojena)

Povlačenjem relativne funkcije optimizacije ciljeva prema ishodištu dijagrama izolira se mali broj najboljih materijala za izradu vitkih i lakih nogica stolića. Najbolji materijali omeđeni su relativnom funkcijom optimizacije ciljeva i optimalnom kompromisnom krivuljom.



Slika 4.7 Dijagram materijala s izoliranim najboljim materijalima

U tablici 4.2 su prikazani najbolji materijali i relativne vrijednosti mase i radijusa u odnosu na referentni materijal.

Tablica 4.2 Popis najboljih materijala za izradu lakih i vitkih nogica stolića

Naziv materijala	$\frac{m}{m_0} = \frac{\rho}{900} \cdot \left(\frac{22}{E}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{R}{R_0} = \frac{22}{E}$
CFRP, epoxy matrix (isotropic)	0.658 - 0.974	0.147 - 0.319
Wrought magnesium alloys	1.17 - 1.53	0.468 - 0.524
Cast magnesium alloys	1.35 - 1.47	0.468 - 0.524
Aluminum/Silicon carbide composite	1.43 - 1.63	0.22 - 0.272

Najbolje rješenje je izbor kompozita: epoksidna smola ojačana karbonskim vlaknima CFRP. Tanje nogice se mogu dobiti primjenom niskolegiranih čelika. Primjenom drva dobivaju se lake nogice, ali ni približno vitke kao čelične.

4.1.2 Zadatak 2 – Kućište elektroničkog uređaja

Zadatak

Jedna od najvažnijih osobina (linija vodilja dizajnerima) elektroničkih uređaja je njihova vitkost. Idealan je uređaj koji se može spremiti u džep i zaboraviti da je tamo. Kućište mora biti dovoljno kruto i čvrsto kako bi zaštitilo elektroničke komponente i ekran od oštećenja.



Nekada upotrebljavana kućišta su izrađivana iz polimera ABS ili PC. Da bi zadovoljilo ograničenje krutosti, kućište iz ABS je trebalo imati stjenku minimalno 2 mm debljine – previše za današnji dizajn. Danas se naročito vrednuju lagani i tanki uređaji. Ukoliko su kućišta nedovoljno kruta, deformiraju se i oštećuje se ekran. Prirodni materijali se ne uzimaju u razmatranje u ovom primjeru.



Izazov je odabrati materijal kućišta koje ima krutost barem kao kućište iz ABS debljine stjenke $t = 2$ mm, te koje je tanje i lakše. Materijal mora imati i dovoljnu udarnu žilavost, $G_{IC} > 1$ kJ/m².

Za uočiti je da materijal koji rezultira najtanjim kućištem neće biti najlaganija izvedba i obratno. Dakle, radi se o suprotstavljenim ciljevima čije se optimalno rješenje pronalazi kompromisnom metodom.

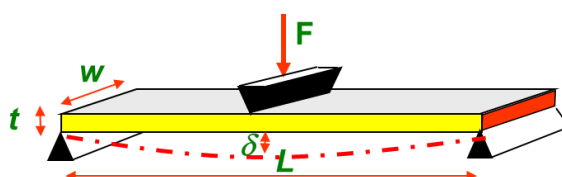
Rješenje

U tablici 4.3 su sažeti zahtjevi dizajna za izbor materijala krutog lakog i vitkog kućišta elektroničkog uređaja.

Tablica 4.3 Tablica sa zahtjevima dizajna za kućište elektroničkog uređaja

Zahtjevi dizajna za kućište elektroničkog uređaja	
FUNKCIJA	Kućište elektroničkog uređaja
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja Dimenzije: - duljina L - širina w Prirodni materijali isključeni iz izbora! Limitirajuća ograničenja - Ne smije doći do loma uslijed slučajnog udarca $G_{IC} > 1 \text{ kJ/m}^2$ Aktivno ograničenje 1. Savojna krutost S_0
CILJ	a) Minimalna debljina stijenke kućišta t b) Minimalna masa kućišta m
SLOBODNE VARIABLE	Izbor materijala Radius nogice R kada je cilj minimalna masa

Problem je pojednostavljen na način da je kućište prikazano kao ploča jednostavno oslonjena na krajevima i opterećena koncentriranim opterećenjem u središnjem dijelu prema slici 4.8.



Slika 4.8 Pojednostavljeni prikaz oslonjenog i opterećenog kućišta elektroničkog uređaja

Prvi cilj je minimalna debljina stijenke kućišta t , a ograničenje krutost kućišta koja mora biti veća ili jednaka traženoj krutosti S_0 . Izraz za krutost ploče je preuzet iz Priručnika:

$$S = \frac{F}{\delta} = \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3} \geq S_0 \quad (1)$$

Aksijalni moment inercije za pravokutni presjek je:

$$I = \frac{w \cdot t^3}{12} \quad (2)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) te izdvajanjem debljine stjenke t na lijevu stranu izraza:

$$t \geq \left(\frac{S \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot w} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

Sređivanjem izraza (3) na način da se odvoje funkcija, geometrija i svojstva materijala dobije se razvijena funkcija 1. cilja:

$$t \geq \left(\frac{S}{4 \cdot w} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot L \cdot \left(\frac{1}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

Indeks za izbor materijala za 1. cilj je:

$$M_1 = \left(\frac{1}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

Drugi cilj je minimalizacija mase kućišta m uz isto ograničenje kao i za prvi cilj. Masa pojednostavljenog kućišta je:

$$m = w \cdot t \cdot L \cdot \rho \quad (6)$$

Gdje je debljina stjenke t slobodna varijabla. Eliminacijom slobodne varijable uvrštavanjem izraza (3) u izraz (6) slijedi funkcija drugog cilja:

$$m \geq \left(\frac{S}{4 \cdot w} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (w \cdot L^2) \cdot \left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}} \right) \quad (7)$$

Indeks za izbor materijala za 2. cilj je:

$$M_2 = \frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}} \quad (8)$$

Za slučaj izbora materijala korištenjem relativne funkcije optimizacije ciljeva kada se ciljevi minimiziraju osi dijagrama svojstava materijala u kojemu se vrši izbor su:

$$\text{OS „x”}: \quad \frac{t}{t_0} = \frac{M_1}{M_{1,0}} = \frac{\frac{1}{E^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{E_0^{\frac{1}{3}}}} = \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

$$\text{OS „y”}: \quad \frac{m}{m_0} = \frac{M_2}{M_{2,0}} = \frac{\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}}}{\frac{\rho_0}{E_0^{\frac{1}{3}}}} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

Kao referentni materijal u ovom primjeru je odabran polimer ABS sa svojstvima:

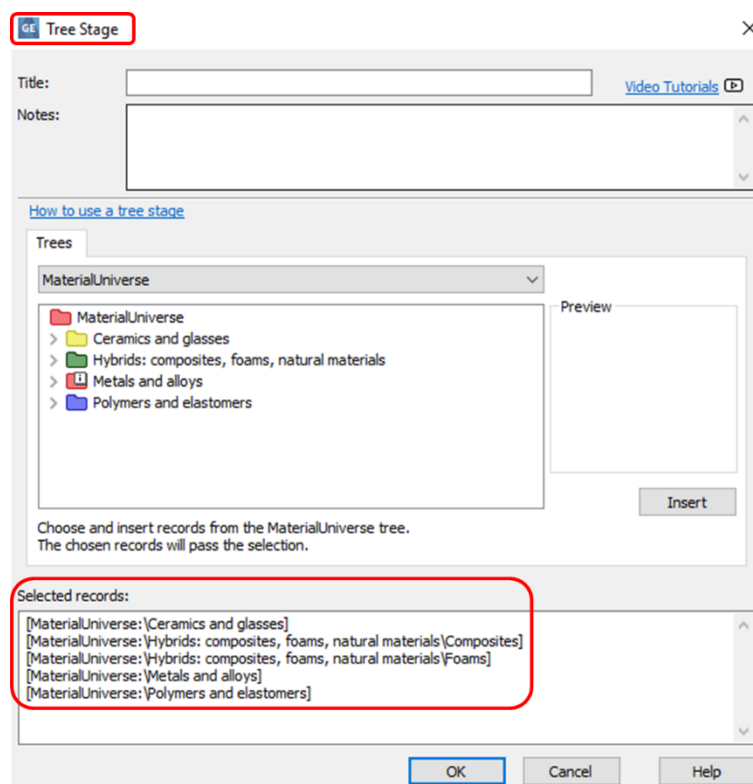
$$\rho_0 = \rho_{ABS} = 1045 \text{ kg/m}^3 \quad E_0 = E_{ABS} = 2,4 \text{ GPa} \quad (11)$$

Uvrštavanjem vrijednosti svojstava za referentni materijal (11) slijede osi dijagrama:

$$\text{OS „x”}: \quad \frac{t}{t_0} = \left(\frac{2,4}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

$$\text{OS „y”}: \quad \frac{m}{m_0} = \frac{\rho}{1045} \cdot \left(\frac{2,4}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

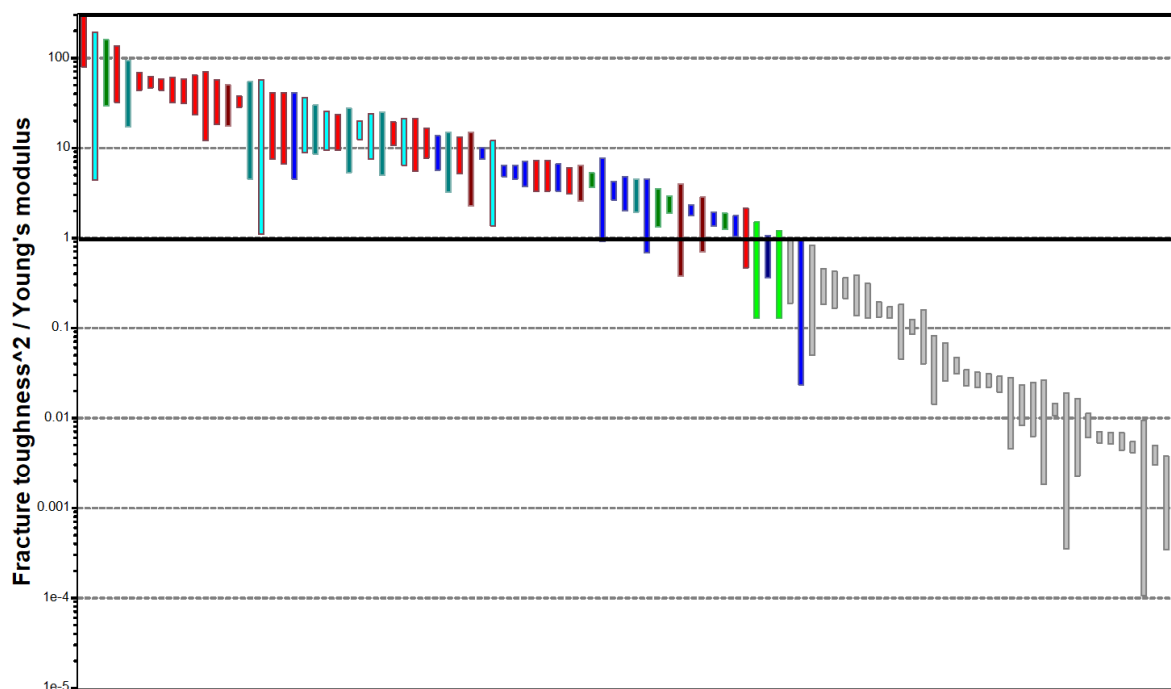
Na slici 4.9 je prikazan način filtriranja baze materijala (iz izbora su isključeni prirodni materijali). Crvenim okvirom na slici su zaokružene klase materijala koje su uzete u obzir za izbor.



Slika 4.9 Filtriranje baze podataka – prirodni materijali nisu uzeti u razmatranje

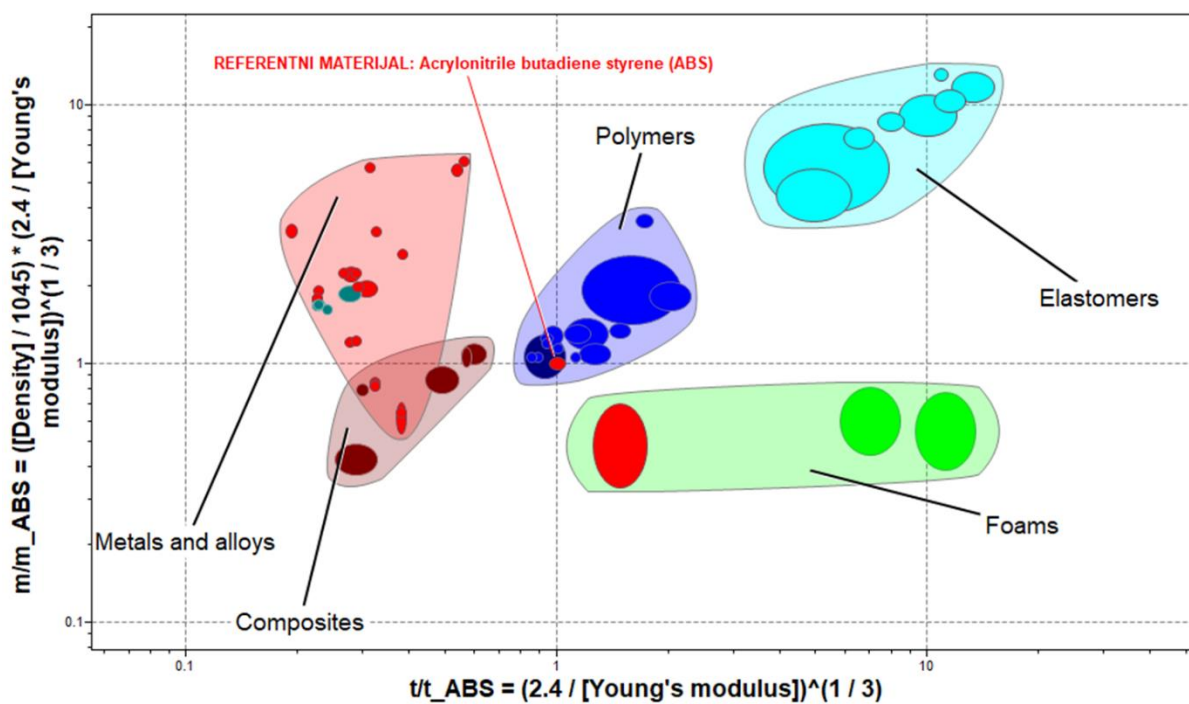
Primjena ograničenja udarne žilavosti izvršena je primjenom trakastog dijagrama na slici 4.10. Ograničenje je realizirano korištenjem alata („box selection“) gdje je donji dio postavljen na vrijednost minimalno tražene udarne žilavosti, a gornji dio u vrhu dijagrama. Obzirom da svojstvo udarne žilavosti nije implementirano u korištenoj bazi podataka korišten je jednostavan izraz za izračunavanje udarne žilavosti materijala:

$$G_{1c} = \frac{K_{1c}^2}{E} \quad (14)$$



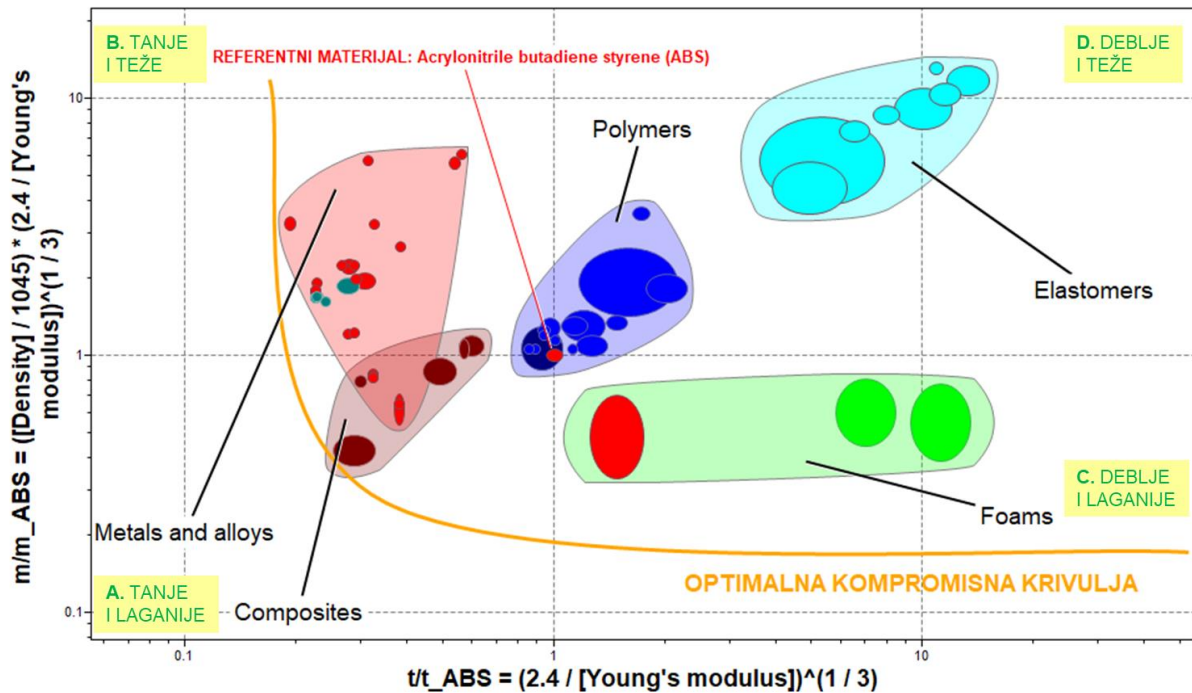
Slika 4.10 Primjena limitirajućeg ograničenja udarne žilavosti $G_{1C} > 1 \text{ kJ/m}^2$

Na slici 4.11 je prikazan dijagram svojstava materijala nakon primjene limitirajućeg ograničenja za udarnu žilavost. Zbog jednostavnosti u dijagramu materijala korištena je baza podataka („Level 2”) s malim brojem materijala. Referentni materijal se nalazi na koordinati (1, 1).



Slika 4.11 Dijagram materijala s aktivnim limitirajućim ograničenjem $G_{1C} > 1 \text{ kJ/m}^2$

U sljedećem koraku u dijagram treba ucrtati optimalnu kompromisnu krivulju („trade off“ krivulja) prema slici 4.12 na način da sa lijeve i donje strane dijagrama obuhvaća sve materijale.



Slika 4.12 Dijagram materijala s ucrtanom „trade off“ krivuljom

S ciljem određivanja jedinstvenog rješenja formulira se funkcija optimizacije ciljeva izbora Z ili relativna funkcija optimizacije ciljeva izbora Z*:

$$Z = \alpha_t \cdot t + \alpha_m \cdot m \Rightarrow Z = \alpha_t \cdot t \cdot \frac{t_0}{t_0} + \alpha_m \cdot m \cdot \frac{m_0}{m_0} \quad (15)$$

Sređivanje izraza (15) slijedi:

$$Z^* = (\alpha_t \cdot t_0) \cdot \frac{t}{t_0} + (\alpha_m \cdot m_0) \cdot \frac{m}{m_0} = \alpha_t^* \cdot \frac{t}{t_0} + \alpha_m^* \cdot \frac{m}{m_0} \quad (16)$$

Konačno, relativna funkcija optimizacije ciljeva je:

$$Z^* = \alpha_t^* \cdot \frac{t}{t_0} + \alpha_m^* \cdot \frac{m}{m_0} \quad (17)$$

gdje su $\frac{m}{m_0}$ i $\frac{t}{t_0}$ os x i os y u dijagramu svojstava materijala.

Ukoliko obje vrijednosti relativnih konstanti izjednačavanja imaju istu vrijednost (podjednako važni ciljevi):

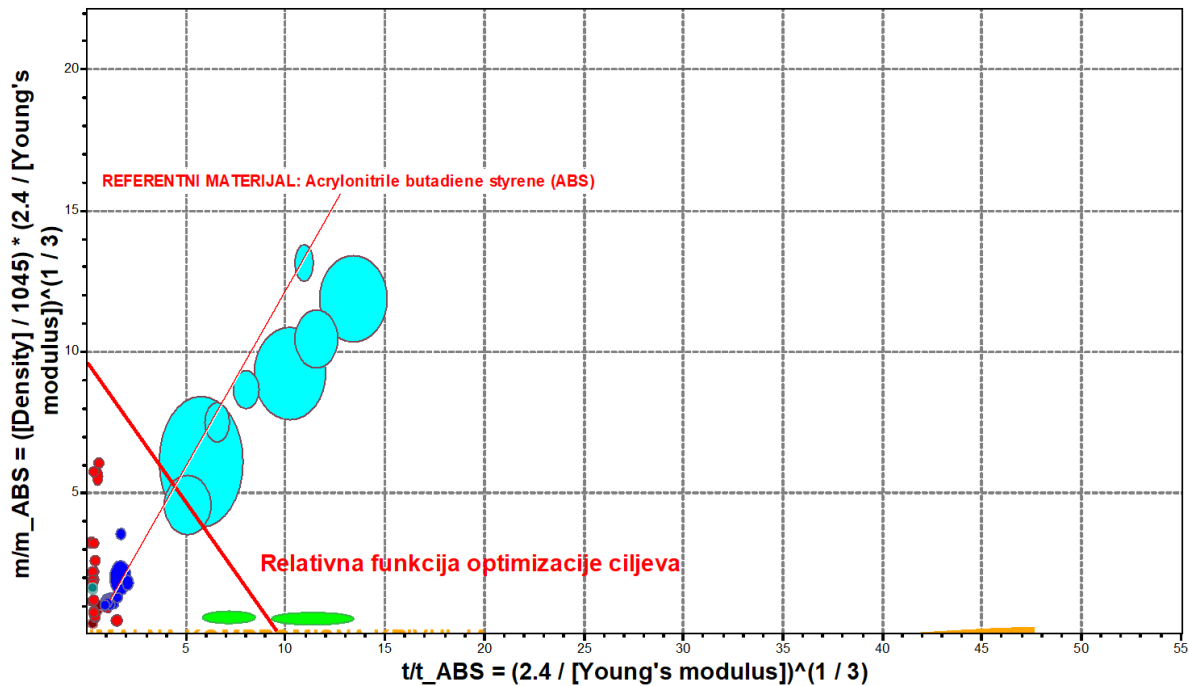
$$\alpha_t^* = \alpha_m^* \quad (18)$$

što znači da promjena i mase i debljine stjenke vrijede podjednako.

Relativna funkcija optimizacije ciljeva u dijagramu materijala s linearnom mjernom skalom je pravac:

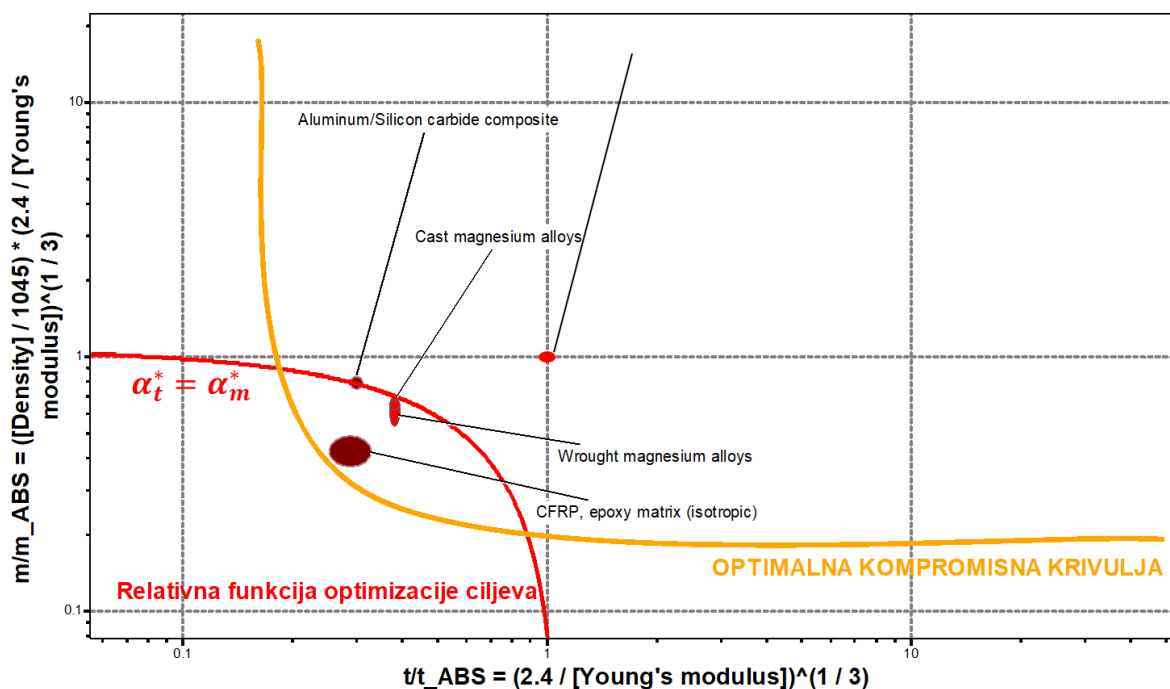
$$\frac{Z^*}{\alpha_m^*} = \frac{t}{t_0} + \frac{m}{m_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t_0} = -1 \cdot \frac{m}{m_0} + \frac{Z^*}{\alpha_m^*} \quad (19)$$

U dijagramu s linearnim mjernim skalama relativna funkcija optimizacije ciljeva je jednadžba pravca nagiba „-1” (slika 4.13).



Slika 4.13 Dijagram materijala s linearnim mjernim skalama i ucrtanom Z^* funkcijom

Vraćanjem dijagrama sa slike 4.13 u logaritamsko mjerilo dobije se dijagram svojstava materijala prikazan na slici 4.14. U dijagramu se vidi da je relativna funkcija za optimizaciju ciljeva Z^* postala krivulja na slici prikazana crvenom bojom.



Slika 4.14 Dijagram materijala s logaritamskom mjernom skalom – relativna funkcija optimizacija ciljeva sada postaje krivulja

U tablici 4.4 su prikazani najbolji materijali i relativne vrijednosti mase i debljine stijenke kućišta u odnosu na referentni materijal. Za uočiti je da su oba cilja bolje ispunjena za sve navedene materijale u odnosu na referentni materijal (sve vrijednosti manje od 1 ukazuju na bolje ispunjavanje cilja).

Tablica 4.4 Popis najboljih materijala za izradu lakog i vitkog kućišta elektroničkog uređaja

Naziv materijala	$\frac{m}{m_{ABS}} = \frac{\rho}{1045} \cdot \left(\frac{2,4}{E}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{t}{t_{ABS}} = \left(\frac{2,4}{E}\right)^{\frac{1}{3}}$
CFRP, epoxy matrix (isotropic)	0.372 - 0.486	0.252 - 0.326
Wrought magnesium alloys	0.542 - 0.706	0.371 - 0.385
Cast magnesium alloys	0.63 - 0.678	0.371 - 0.385
Aluminum/Silicon carbide composite	0.751 - 0.839	0.288 - 0.309

4.1.3 Zadatak 3 – Čeljusti disk kočnice

Uvod

Kod nekih konstrukcija cijena proizvoda ima trećerazrednu vrijednost, te ne utječe na izbor materijala:

- Berilij kod svemirskih letjelica zbog izvanrednog odnosa krutosti spram gustoće;
- Zlato za popunjavanje zubne šupljine zbog svoje iznimne postojanosti;
- Srebro za izradu cilindra motora za trke zbog svoje odlične toplinske vodljivosti.

Ovdje se pojavljuje još jedan primjer:

- materijal za čeljust disk kočnice formule 1



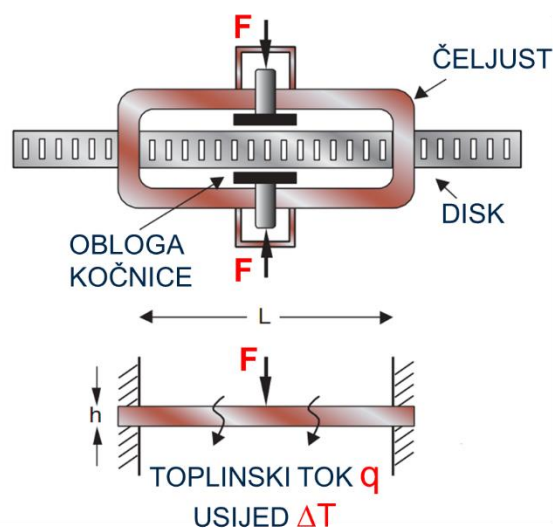
Zadatak

Izvršiti izbor materijala za čeljust disk kočnice i to za slučajeve:

- kada su podjednako važni ciljevi minimalizacije mase i provođenja topline,
- kada je cilj provođenja topline deset puta važniji od cilja minimalizacije mase,
- kada je cilj minimalizacije mase deset puta važniji od cilja provođenja topline.

Rješenje

Čeljust disk kočnice se može pojednostavljeno prikazati kao dvije „grede”, duljine L , širine b i debljine h , međusobno povezane na svojim krajevima, prema slici 4.15. Obje grede su opterećene kada se kočnica koristi, zbog čega se generira toplina, a čeljust postaje vruća. Kritična je i krutost „grede” – ukoliko je krutost nedovoljna čeljust će se savijati umanjujući učinak kočenja i dozvoljavajući vibraciju sustava. Sposobnost čeljusti da provodi toplinu je također kritično svojstvo – dio topline generiran kočenjem mora se provesti kroz čeljust. Zahtjevi dizajna su prikazani u tablici 4.5.



Slika 4.15 Pojednostavljeni prikaz čeljusti disk kočnice

Tablica 4.5 Tablica sa zahtjevima dizajna za čeljust disk kočnice

Zahtjevi dizajna za krute i toplinski provodljive čeljusti disk kočnice	
FUNKCIJA	Čeljusti disk kočnice
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja Dimenzije: - duljina čeljusti (grede) L - širina poprečnog presjeka čeljusti b Limitirajuća ograničenja - Udarne žilavost $G_{IC} > 1 \text{ kJ/m}^2$ Aktivno ograničenje 1. Tražena savojna krutost čeljusti S_0
CILJ	1. Minimalna masa čeljusti m 2. Maksimalno provođenje topline kroz čeljust $\dot{q}$
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Debljina stijenke čeljusti h

Prvi cilj je minimalizacija mase čeljusti disk kočnice širine b , debljine stijenke čeljusti h i duljine L :

$$m = b \cdot h \cdot L \cdot \rho \quad (1)$$

Ograničenje je krutost čeljusti koja mora biti veća ili jednaka traženoj krutosti S_0 . Izraz za krutost ploče je preuzet iz Priručnika:

$$S = \frac{F}{\delta} = \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \geq S_0 \quad (2)$$

Aksijalni moment inercije za pravokutni presjek je:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (3) u izraz (2) slijedi:

$$S = \frac{C_1 \cdot E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot L^3} \geq S^* \quad (4)$$

Izdvajanjem slobodne varijable (debljine stijenke h) iz izraza (4) na lijevu stranu izraza:

$$h \geq \left(\frac{12 \cdot S^*}{C_1 \cdot E \cdot b} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot L \quad (5)$$

Eliminacijom slobodne varijable h iz funkcije cilja tj. uvrštavanjem izraza (5) u izraz (1):

$$m \geq \left(\frac{12 \cdot S^*}{c_1} \right)^{\frac{1}{3}} b^{2/3} \cdot L^2 \cdot \left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}} \right) \quad (6)$$

Indeks za izbor materijala za 1. cilj je:

$$M_1 = \left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}} \right) \quad (7)$$

Drugi cilj je maksimalizacija provedene topline kroz čeljust disk kočnice. Toplinski tok kroz čeljust disk kočnice po jedinici površine (prema Priručniku) je:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{b \cdot L} = \lambda \cdot \frac{\Delta T}{h} \quad (8)$$

Eliminacijom slobodne varijable h (5) iz funkcije cilja (8) uvrštavanjem izraza (5) u izraz (8) (primjena ograničenja krutosti) slijedi funkcija drugog cilja:

$$\dot{q} \leq \left(\frac{\Delta T^3 \cdot c_1}{12 \cdot S^*} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot L^{-1} \cdot \left(\lambda \cdot E^{\frac{1}{3}} \right) \quad (9)$$

Indeks za izbor materijala za 2. cilj je:

$$M_2 = \frac{1}{\lambda \cdot E^{\frac{1}{3}}} \quad (10)$$

Obzirom da je cilj 2 potrebno maksimalizirati indeks materijala koji se minimalizira jest recipročna vrijednost kombinacije svojstava materijala u funkciji cilja (9).

Standardni materijal za čeljust kočnice je nodularni lijev (jeftin i krut materijal – ali težak i relativno loš vodič topline). Svojstva nodularnog lijeva su korištena za usporedbu i formiranje relativne funkcije optimizacije ciljeva Z^* , tj. nodularni lijev je uzet kao referentni materijal.

Za slučaj izbora materijala korištenjem relativne funkcije optimizacije ciljeva (kada se 1. cilj minimizira, a 2. cilj maksimalizira) osi dijagrama svojstava materijala u kojemu se vrši izbor su:

OPREZ !!!

OS „x”:  $\frac{\dot{q}_0}{\dot{q}} = \frac{M_2}{M_{2,0}} = \frac{\lambda_0 \cdot E_0^{\frac{1}{3}}}{\lambda \cdot E^{\frac{1}{3}}} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (11)$

OS „y”: $\frac{m}{m_0} = \frac{M_1}{M_{1,0}} = \frac{\frac{\rho}{E^{\frac{1}{3}}}}{\frac{\rho_0}{E_0^{\frac{1}{3}}}} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (12)$

Kao referentni materijal u ovom primjeru je odabran nodularni lijev sa svojstvima:

$$\rho_0 = \rho_{NL} = 7100 \text{ kg/m}^3 \quad E_0 = E_{NL} = 175 \text{ GPa} \quad \lambda_0 = \lambda_{NL} = 36 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \quad (11)$$

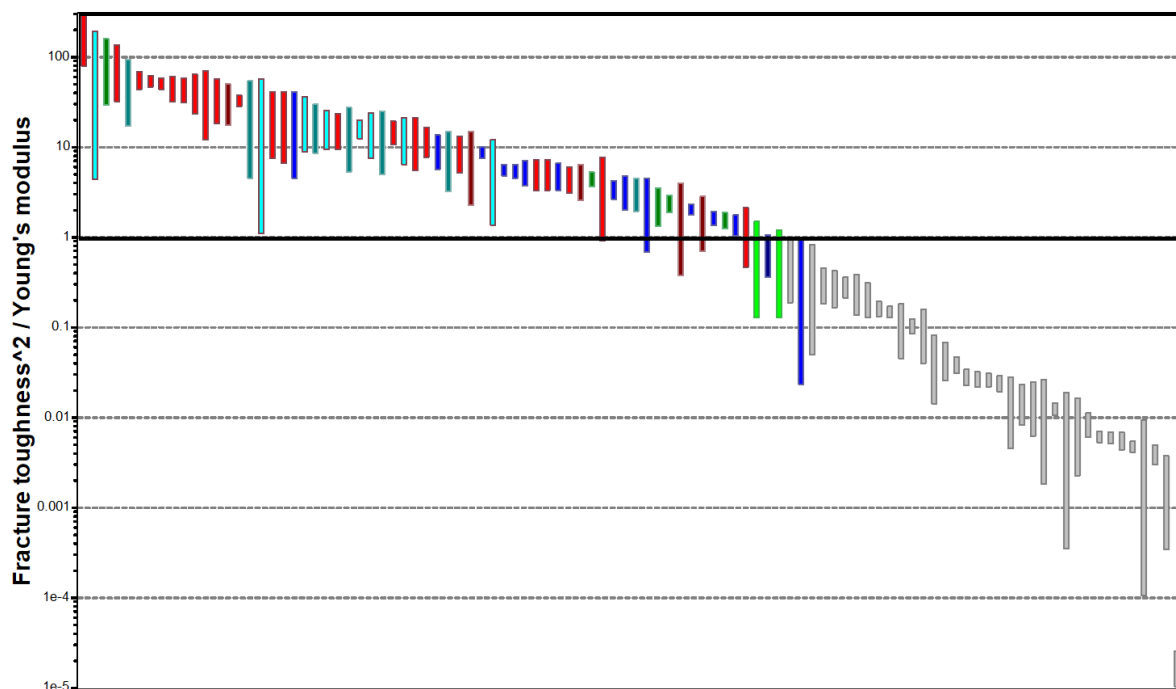
Uvrštavanjem vrijednosti svojstava za referentni materijal (11) slijede osi dijagrama:

$$\text{OS „x”}: \quad \frac{\dot{q}_0}{q} = \frac{36}{\lambda} \cdot \left(\frac{175}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

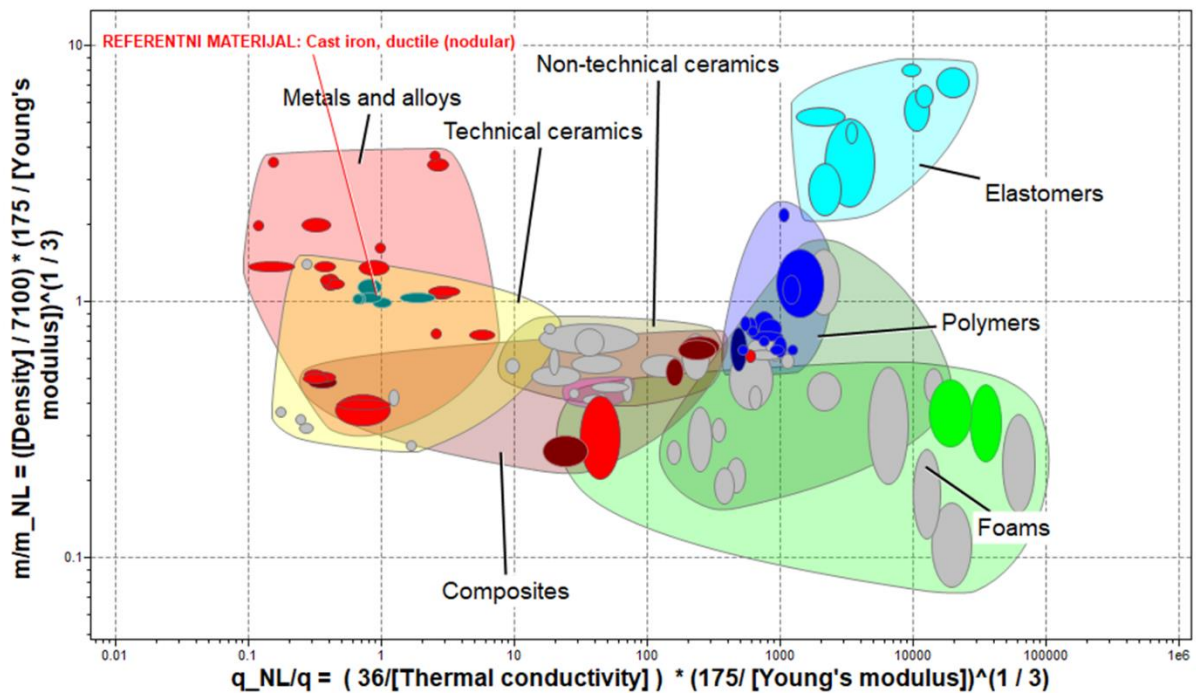
$$\text{OS „y”}: \quad \frac{m}{m_0} = \frac{\rho}{7100} \cdot \left(\frac{175}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

Primjena ograničenja udarne žilavosti izvršena je primjenom trakastog dijagrama na slici 4.16.

Na slici 4.17 je prikazan dijagram svojstava materijala nakon primjene limitirajućeg ograničenja za udarnu žilavost. Zbog jednostavnosti u dijagramu materijala korištena je baza podataka („Level 2”) s malim brojem materijala. Referentni materijal (nodularni lijev) se nalazi na koordinati (1, 1).



Slika 4.16 Primjena limitirajućeg ograničenja za udarnu žilavost $G_{1C} > 1 \text{ kJ/m}^2$



Slika 4.17 Dijagram svojstava materijala nakon primjene ograničenja $G_{IC} > 1 \text{ kJ/m}^2$

S ciljem određivanja jedinstvenog rješenja formulira se relativna funkciju optimizacije ciljeva izbora Z^* :

$$Z^* = \alpha_m^* \cdot \frac{m}{m_0} + \alpha_q^* \cdot \frac{q_0}{q} \quad (14)$$

gdje su $\frac{q_0}{q}$ i $\frac{m}{m_0}$ os x i os y u dijagramu svojstava materijala.

a) Jednaka važnost oba cilja

Ako je podjednaka važnost oba cilja konstante izjednačavanja imaju istu vrijednost:

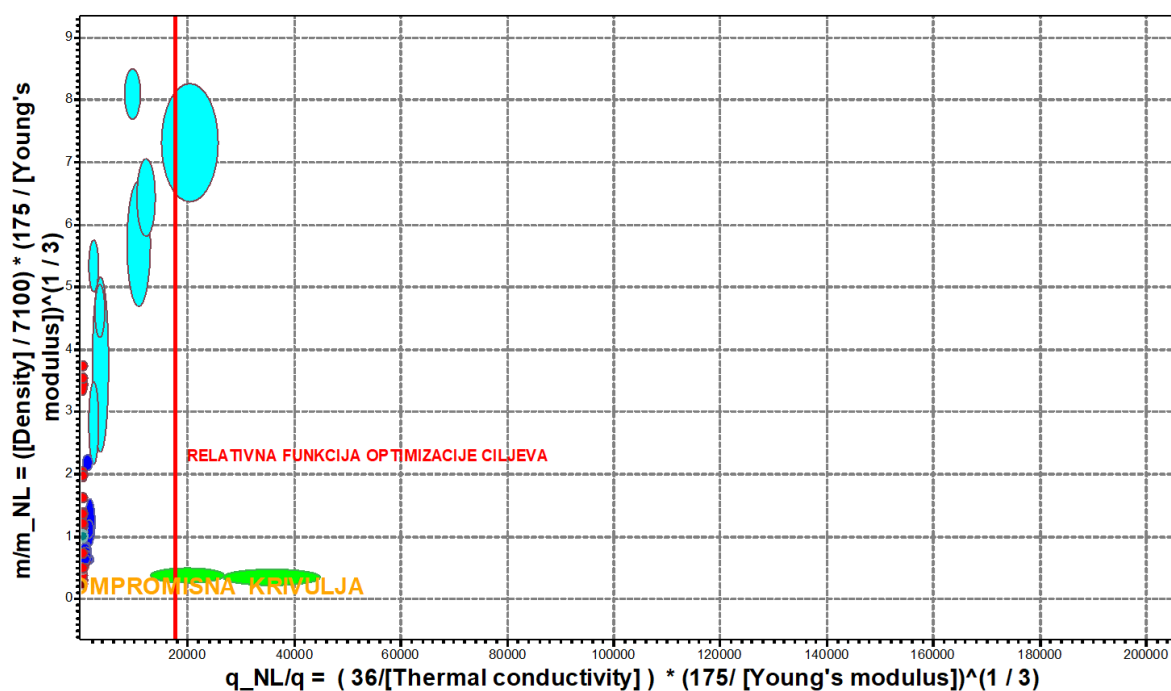
$$\alpha_q^* = \alpha_m^* \quad (15)$$

što znači da promjena i mase i izmijenjene topline vrijede podjednako.

Relativna funkcija optimizacije ciljeva u dijagramu materijala s linearnom mjernom skalom je pravac:

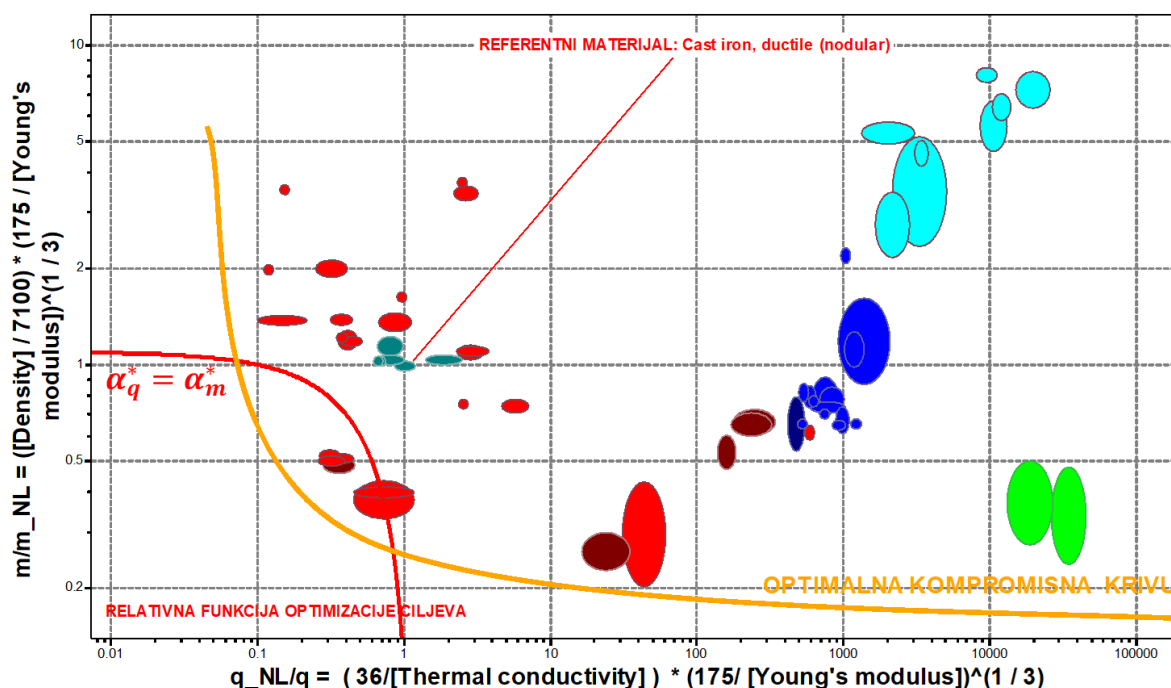
$$\frac{Z^*}{\alpha_m^*} = \frac{q_0}{q} + \frac{m}{m_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{m_0} = -1 \cdot \frac{q_0}{q} + \frac{Z^*}{\alpha_m^*} \quad (16)$$

U dijagramu s linearnim mjernim skalama relativna funkcija optimizacije ciljeva je jednačba pravca nagiba „-1” kao linija crvene boje (slika 4.18).

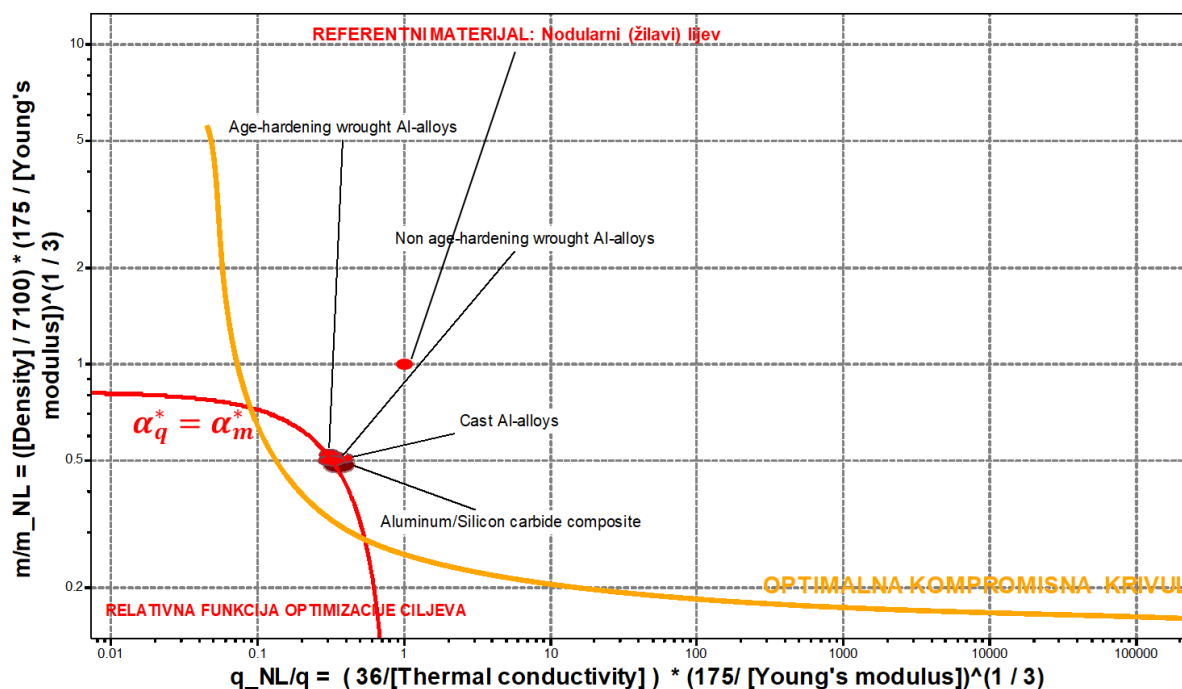


Slika 4.18 Dijagram materijala s linearnim mjernim skalama i ucrtanom Z^* funkcijom

Vraćanjem dijagrama sa slike 4.18 u logaritamsko mjerilo dobije se dijagram svojstava materijala prikazan na slici 4.19. U dijagramu se vidi da je relativna funkcija za optimizaciju ciljeva Z^* postala krivulja (krivulja crvene boje). Nakon aktiviranja kriterija minimalizacije relativne funkcije optimizacije ciljeva Z^* dijagram materijala poprima izgled na slici 4.20. U dijagramu su naznačena četiri najbolja materijala.



Slika 4.19 Dijagram materijala s logaritamskom mjernom skalom – relativna funkcija optimizacija ciljeva sada postaje krivulja



Slika 4.20 Dijagram materijala s aktiviranim kriterijem minimalizacije relativne funkcije optimizacije ciljeva Z^*

U tablici 4.6 su prikazani najbolji materijali i relativne vrijednosti mase i toplinskog toka čeljusti disk kočnice u odnosu na referentni materijal. Za uočiti je da su oba cilja bolje ispunjena za sve navedene materijale u odnosu na referentni materijal (sve vrijednosti manje od 1 ukazuju na bolje ispunjavanje cilja). Najbolji izbor (u korištenoj bazi podataka) s aspekta oba cilja je gnječilačka legura aluminija neočvrstiva dozrijevanjem („Non age-hardening wrought Al-alloys”).

Tablica 4.6 Popis najboljih materijala za izradu lake čeljusti disk kočnice visoke toplinske vodljivosti

Naziv materijala	$\frac{\dot{q}_{NL}}{\dot{q}} = \frac{36}{\lambda} \cdot \left(\frac{175}{E}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{m}{m_{NL}} = \frac{\rho}{7100} \cdot \left(\frac{175}{E}\right)^{\frac{1}{3}}$
Non age-hardening wrought Al-alloys	0.257 - 0.388	0.462 - 0.516
Age-hardening wrought Al-alloys	0.262 - 0.359	0.497 - 0.515
Aluminum/Silicon carbide composite	0.28 - 0.45	0.498 - 0.526
Cast Al-alloys	0.298 - 0.439	0.503 - 0.541

b) Cilj provođenja topline deset puta važniji od cilja minimalizacije mase

Ako je značaj provođenja topline 10 puta veći od uštede na masi, linije relativne funkcije odabira se pomiču:

$$\alpha_q^* = 10 \cdot \alpha_m^* \quad (17)$$

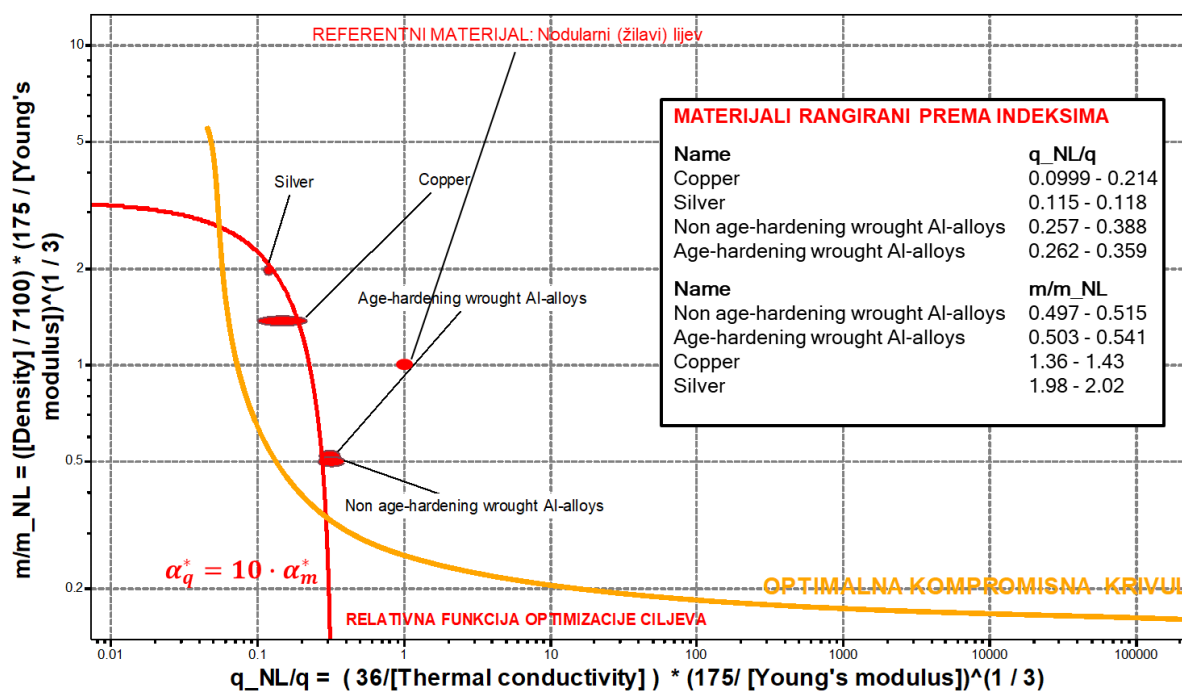
Slijedi da je:

$$Z^* = \alpha_m^* \cdot \frac{m}{m_0} + \alpha_q^* \cdot \frac{q_0}{q} \Rightarrow \frac{Z^*}{\alpha_m^*} = \frac{m}{m_0} + 10 \cdot \frac{q_0}{q} \quad (18)$$

Prikaz izraza (18) u formi jednadžbe pravca:

$$\frac{m_a}{m_{a,0}} = -10 \cdot \frac{q_{a,0}}{q_a} + \frac{Z^*}{\alpha_m^*} \quad (19)$$

U dijagramu s linearnim mjernim skalama relativna funkcija optimizacije ciljeva je jednadžba pravca nagiba „-10”. Izbor materijala za ovaj slučaj je prikazan u dijagramu materijala na slici 4.21. U okviru dijagrama je i prikazana tablica s najboljima materijalima i prikazanim vrijednostima relativne mase i relativne količine izmijenjene topline u odnosu na referentni materijal. U ovom slučaju bakar je najbolji materijal s aspekta izmjene topline, dok je najbolji materijal s aspekta cilja minimalizacije mase gnječilačka legura aluminija neočvrstiva dozrijevanjem.



Slika 4.21 Dijagram svojstava materijala s ucrtanom funkcijom Z^* kada je cilj provođenja topline deset puta važniji od cilja minimalizacije mase

c) Cilj minimalizacije mase deset puta važniji od cilja provođenja topline

Ako je značaj smanjenja mase 10 puta veći od povećanja provođenja topline, linije relativne funkcije odabira se ponovno pomiču:

$$10 \cdot \alpha_q^* = \alpha_m^* \quad (20)$$

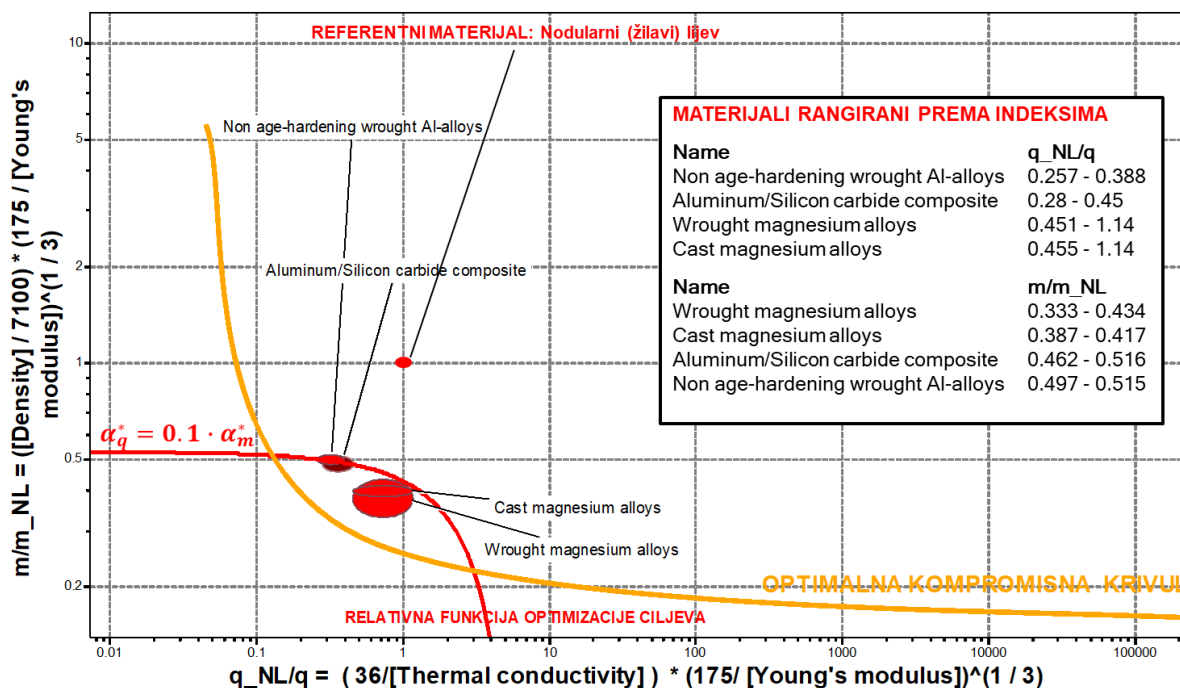
Sada je relativna funkcija optimizacije ciljeva:

$$Z^* = \alpha_m^* \cdot \frac{m}{m_0} + \alpha_q^* \cdot \frac{q_0}{q} \Rightarrow \frac{Z^*}{\alpha_m^*} = 10 \cdot \frac{m}{m_0} + \frac{q_0}{q} \quad (21)$$

Prikaz izraza (18) u formi jednadžbe pravca:

$$\frac{m_a}{m_{a,0}} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{q_{a,0}}{q_a} + \frac{Z^*}{\alpha_m^*} \quad (22)$$

U dijagramu s linearnim mjernim skalama relativna funkcija optimizacije ciljeva je jednadžba pravca nagiba „ $-\frac{1}{10}$ ”. Izbor materijala za ovaj slučaj je prikazan u dijagramu materijala na slici 4.22. U okviru dijagrama prikazana je tablica s najboljima materijalima i prikazanim vrijednostima relativne mase i relativne količine izmijenjene topline u odnosu na referentni materijal. U ovom slučaju najbolji materijal s aspekta izmjene topline je gnječilačka legura aluminija neočvrstiva dozrijevanjem, dok su najbolji materijal s aspekta cilja minimalizacije mase gnječilačke legure magnezija.



Slika 4.22 Dijagram svojstava materijala s ucrtanom funkcijom Z^* kada je cilj minimalizacije mase deset puta važniji od cilja provođenja topline

5 SUBJEKTIVNE METODE ODLUČIVANJA – METODA TEŽINSKIH FAKTORA

5.1.1 Zadatak 1 – Izbor materijala za kaljužnu pumpu

Zadatak

Primjenom metode težinskih potrebno je odabrati kaljužnu pumpu između tri ponuđena modela čija su ključna svojstva prikazana u tablici 5.1.



Tablica 5.1 Ponuđeni modeli kaljužnih pumpi i njihova svojstva

Model	1 Cijena €	2 Masa kg	3 Antikorozivnost	4 Protok $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$
a) kućište iz nehrđajućeg čelika	1100	6	4	50
b) kućište iz bronce	900	7	5	50
c) kućište iz Al legure	600	3	3	30

Procijenjeni težinski faktori svojstava su prikazani u tablici 5.2.

Tablica 5.2 Težinski faktori svojstava

	Cijena €	Masa kg	Antikorozivnost	Protok $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$
TEŽINSKI FAKTOR SVOJSTVA w_i	0,2	0,2	0,2	0,4

Odrediti poredak ponuđenih kaljužnih pumpi primjenom subjektivne metode težinskih faktora.

Rješenje

Određivanje pojedinačnih ponderiranih indeksa

Pojedinačni ponderirani indeks kada je minimalna vrijednost svojstva bolja određuje se prema izrazu:

$$W_i = w_i \cdot \frac{M_{i,min}}{M_i} \quad (1)$$

U slučaju kada je veća vrijednost bolja za određivanje pojedinačnih ponderiranih indeksa koristi se izraz:

$$W_i = w_i \cdot \frac{M_i}{M_{i,max}} \quad (2)$$

Ukupni ponderirani indeks na temelju kojega se procjenjuje izbor (u ovom slučaju kaljužne pumpe) određuje se kao suma svih pojedinačnih ponderiranih indeksa:

$$W = \sum W_i \quad (3)$$

a) Pojedinačni i ukupni ponderirani indeksi za kaljužnu pumpu s kućištem iz nehrđajućeg čelika

Za svojstvo cijene:

$$W_{1,a} = 0,2 \cdot \frac{600}{1100} = 0,11 \quad (4)$$

Za svojstvo mase:

$$W_{2,a} = 0,2 \cdot \frac{3}{6} = 0,10 \quad (5)$$

Za svojstvo antikorozivnosti:

$$W_{3,a} = 0,2 \cdot \frac{4}{5} = 0,16 \quad (6)$$

Za svojstvo protoka:

$$W_{4,a} = 0,4 \cdot \frac{50}{50} = 0,4 \quad (7)$$

Ukupni ponderirani indeks za kaljužnu pumpu s kućištem iz nehrđajućeg čelika:

$$W_a = W_{1,a} + W_{2,a} + W_{3,a} + W_{4,a}$$

$$W_a = 0,11 + 0,10 + 0,16 + 0,4$$

$$W_a = 0,77 \quad (8)$$

b) Pojedinačni i ukupni ponderirani indeksi za kaljužnu pumpu s kućištem iz bronce:

Za svojstvo cijene:

$$W_{1,b} = 0,2 \cdot \frac{600}{900} = 0,13 \quad (9)$$

Za svojstvo mase:

$$W_{2,b} = 0,2 \cdot \frac{3}{7} = 0,09 \quad (10)$$

Za svojstvo antikorozivnosti:

$$W_{3,b} = 0,2 \cdot \frac{5}{5} = 0,2 \quad (11)$$

Za svojstvo protoka:

$$W_{4,b} = 0,4 \cdot \frac{50}{50} = 0,4 \quad (12)$$

Ukupni ponderirani indeks za kaljužnu pumpu s kućištem iz nehrđajućeg čelika:

$$W_b = W_{1,b} + W_{2,b} + W_{3,b} + W_{4,b}$$

$$W_b = 0,13 + 0,09 + 0,2 + 0,4$$

$$W_b = 0,82 \quad (13)$$

c) Pojedinačni i ukupni ponderirani indeksi za kaljužnu pumpu s kućištem iz legure aluminija:

Za svojstvo cijene:

$$W_{1,c} = 0,2 \cdot \frac{600}{600} = 0,2 \quad (14)$$

Za svojstvo mase:

$$W_{2,c} = 0,2 \cdot \frac{3}{3} = 0,2 \quad (15)$$

Za svojstvo antikorozivnosti:

$$W_{3,c} = 0,2 \cdot \frac{3}{5} = 0,12 \quad (16)$$

Za svojstvo protoka:

$$W_{4,c} = 0,4 \cdot \frac{30}{50} = 0,24 \quad (17)$$

Ukupni ponderirani indeks za kaljužnu pumpu s kućištem iz nehrđajućeg čelika:

$$W_c = W_{1,c} + W_{2,c} + W_{3,c} + W_{4,c}$$

$$W_c = 0,2 + 0,2 + 0,12 + 0,24$$

$$W_c = 0,76 \quad (18)$$

U tablici 5.3 prikazani su ukupni ponderirani indeksi za sve kaljužne pumpe te je izvršeno rangiranje istih. Najbolji izbor je kaljužna pumpa s kućištem iz bronce, a najlošiji izbor je kaljužna pumpa s kućištem iz legure aluminija.

Tablica 5.3 Ukupni ponderirani indeksi za kaljužne pumpe

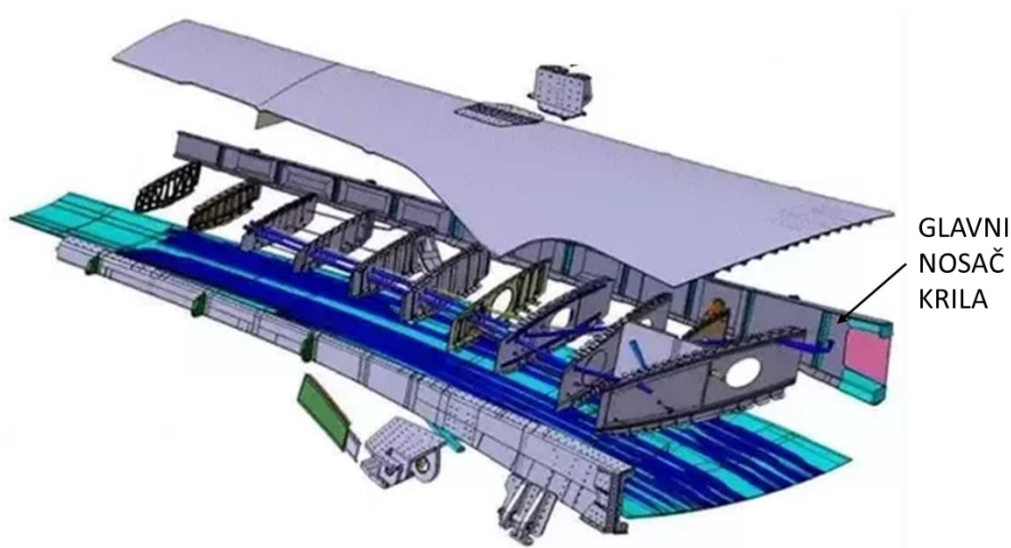
Model	Cijena €	Masa kg	Otpornost na koroziju	Protok, m ³ /h	$\sum W_i$
a) kućište iz nehrđajućeg čelika	0.11	0.10	0.16	0.40	0.77
b) kućište iz bronce	0.13	0.09	0.20	0.40	0.82
c) kućište iz Al legure	0.20	0.20	0.12	0.24	0.76

6 IZBOR MATERIJALA I OBLIKA

6.1.1 Zadatak 1 – Nosač krila jedrilice

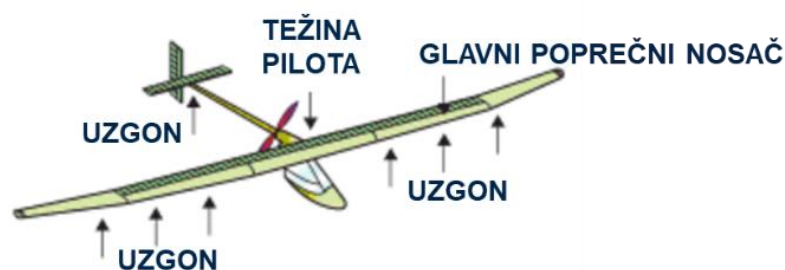
Uvod

U većini slučajeva ciljevi inženjerskog dizajna su kompleksni, često zahtijevajući kompromise između performansi i cijene. U slučaju glavnog nosača krila aviona-jedrilice cilj projektiranja je jednostavan. Nosač mora biti lagan uz dovoljnu krutost kako bi održao aerodinamičnu učinkovitost krila. Na slici 6.1 je prikazana konstrukcija krila aviona s označenim glavnim nosačem.



Slika 6.1 Nosiva konstrukcija krila aviona

Avion ima dva glavna nosača: poprečni koji nosi krila (slika 6.2) i uzdužni koji nosi rep. Oba nosača su uglavnom opterećena na savijanje (kod detaljnih proračuna ni torzija ne smije biti zanemarena).



Slika 6.2 Opterećenje glavnog poprečnog nosača krila jedrilice uslijed uzgona i težine

Prvi avioni-jedrilice su bili izrađeni iz drva balze i smreke obložene svilom. Druga generacija se zasnivala na aluminijskim cijevima za nosivi dio konstrukcije. Treća generacija koristi CFRP nosače odgovarajućeg oblika.

Zadatak

U tablici 6.1 ponuđeni su materijali i odgovarajući faktori oblika za izradu glavnog nosača jedrilice. Pronaći kombinaciju materijala i raspoloživih oblika, za glavni (poprečni) nosač krila lake jedrilice, koja minimalizira masu uz osiguranje tražene savojne krutosti nosača.

Tablica 6.1 Tablica s materijalima za izradu glavnog nosača jedrilice

Materijal	Naziv materijala (engl.)	E GPa	ρ kg/m^3	Faktor oblika ϕ_B^e
Drvo, balsa	Balsa (LD), longitudinal direction (L)	8	270	2
Drvo, smreka	Spruce (picea abies) (l)	15.85	510	2
Čelik	Carbon steel, AISI 1020, normalized	210	7850	25
AL 7075, T6	Aluminum, 7075, T6	72.5	2800	25
CFRP	Epoxy/HS carbon fiber, UD prepreg, UD lay-up	141.5	1565	10
Berilij	Beryllium, grade SR-200, sheet, 0.5 to 6.35 mm thick	302.5	1850	15
Be 38%Al	Beryllium-aluminum alloy, AlBeMet 162	189.5	2095	15

Rješenje

Zahtjevi dizajna za izbor materijala i oblika sažeti su u tablici 6.2.

Kao kriterij izbora potrebno je odrediti indeks materijala za dizajn ograničen krutošću materijala.

Masa glavnog nosača krila je:

$$m = A \cdot L \cdot \rho \quad (1)$$

Savojna krutost za nosač (gredu) opterećen na savijanje prema priručniku (slika 2.19) je:

$$S = \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (2)$$

Tablica 6.2 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor materijala nogice stolića

Zahtjevi dizajna za glavni nosač krila lake jedrilice	
FUNKCIJA	Glavni nosač krila jedrilice
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Specificirana duljina nosača L Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Krutost – Specificirana svojna krutost S
CILJ	- Minimalna masa nosača – m
SLOBODNE VARIJABLE	- Izbor materijala - Izbor oblika i razmjera

Za nosač referentnog (kvadratnog) oblika poprečnog presjeka aksijalni moment inercije je:

$$I = \frac{b^4}{12} = \frac{A^2}{12} \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (3) u (2) slijedi da je:

$$S = \frac{c_1 \cdot E \cdot A^2}{12 \cdot L^3} \quad (4)$$

Obzirom da je razmjer (površina poprečnog presjeka) slobodna varijabla izraz (4) se piše:

$$A = \left(\frac{12 \cdot L^3 \cdot S}{c_1 \cdot E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Konačno, eliminacijom slobodne varijable iz izraza za funkciju cilja (1) tj. uvrštavanjem izraza (5) u izraz (1):

$$m_1 = \left(\frac{12 \cdot S}{c_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{\rho}{E^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (6)$$

Indeks materijala za dizajn ograničen krutošću (za nosač referentnog oblika poprečnog presjeka) je:

$$M_1 = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho} \quad (7)$$

Izvedeni indeks ne obuhvaća oblik poprečnog presjeka (vrijedi samo za referentni oblik poprečnog presjeka – puni kvadratni presjek). Kako bi obuhvatili i oblik presjeka u indeks materijala potrebno je uvesti faktor oblika presjeka $\emptyset_B^e$, u ovom slučaju za elastično savijanje.

Prema definiciji, faktor oblika za elastično savijanje predstavlja omjer krutosti promatranog i referentnog (puni presjek kvadratnog oblika) presjeka. Za određivanje omjera krutosti koristi se izraz za savojnu krutost (2). Savojna krutost oblikovanog presjeka je:

$$S = \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (8)$$

Dok je savojna krutost referentnog presjeka

$$S_0 = \frac{C_1 \cdot E \cdot I_0}{L^3} \quad (9)$$

Faktor oblika za elastično savijanje jest omjer krutosti oblikovanog i referentnog presjeka:

$$\emptyset_B^e = \frac{S}{S_0} = \frac{12 \cdot I}{A^2} \quad (10)$$

Gornji izraz treba prikazati u funkciji aksijalnog momenta inercije I

$$I = \frac{\emptyset_B^e \cdot A^2}{12} \quad (11)$$

Uvrštavanjem izraza (11) u izraz (8):

$$S = \frac{C_1}{12} \cdot \frac{E}{L^3} \cdot \emptyset_B^e \cdot A^2 \quad (12)$$

Izdvajanjem slobodne varijable A iz izraza (12) na lijevu stranu:

$$A = \left(\frac{12 \cdot L^3 \cdot S}{C_1 \cdot E \cdot \emptyset_B^e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Konačno, eliminacijom slobodne varijable A tj. uvrštavanjem izraza (13) u funkciju cilja (1):

$$m = \left(\frac{12 \cdot S}{C_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{\rho}{(\emptyset_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (13)$$

Konačno indeks materijala s uključenim faktorom oblika za laku krutu gredu je:

$$M_2 = \frac{(\phi_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}}{\rho} \quad (13)$$

U tablici 6.3 prikazane su vrijednosti indeksa materijala za referentni i oblikovani presjek grede za zadanu grupu materijala.

Tablica 6.3 Vrijednosti indeksa materijala bez i s uključenim faktorom oblika

Materijal	E GPa	ρ kg/m ³	$M_1 = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho}$	Faktor oblika ϕ_B^e	$M = \frac{(\phi_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}}{\rho}$
Drvo, balsa	8	270	0.0105	2	0.0148
Drvo, smreka	15.85	510	0.0078	2	0.0110
Čelik	210	7850	0.0018	25	0.0092
AL 7075, T6	72.5	2800	0.0030	25	0.0152
CFRP	141.5	1565	0.0076	10	0.0240
Berilij	302.5	1850	0.0094	15	0.0364
Be 38%Al	189.5	2095	0.0066	15	0.0254

Ukoliko bi svi materijali imali isti oblik poprečnog presjeka indeks materijala bi se reducirao na oblik $E^{\frac{1}{2}}/\rho$ te bi rangiranje materijala obavili prema ovom kriteriju. U ovom slučaju drvo balse i smreke imaju visoke indekse, CFRP također ima visoku vrijednost indeksa. U ovom slučaju čelik i aluminij ne dolaze u obzir.

Međutim, uzimajući u obzir različite oblike korištenjem indeksa materijala $(\phi_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}/\rho$ s uključenim faktorom oblika, poredak materijala se mijenja. Presjeci s faktorom oblika navedenim u tablici su komercijalno dobavljeni (navedeni faktori oblika su dosta ispod maksimalno postizivih vrijednosti za navedene materijale). Efekt mogućnosti dobivanja presjeka (punog pravokutnog za drvo ili šupljeg pravokutnog za CFRP) je vidljiv u zadnjem stupcu tablice 6.3. Aluminij je sada znatno bolje rangiran (nešto bolji od drva). CFRP postaje neupitno najbolji izbor (ako izuzmemo berilij i njegove legure zbog izuzetno visoke cijene).

Svaka kombinacija materijala i oblika se može tretirati kao novi materijal sa ekvivalentnim vrijednostima modula elastičnosti E^* i gustoće ρ^* materijala:

Vrijednosti ekvivalentnog modula elastičnosti E^* i gustoće ρ^* materijala dobiju se ako se brojnik i nazivnik indeksa materijala (13) podijele s ϕ_B^e čime se dobije:

$$M = \frac{\left(\frac{E}{\phi_B^e}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\rho}{\phi_B^e}} = \frac{(E^*)^{\frac{1}{2}}}{\rho^*} \quad (13)$$

odavde slijedi da su ekvivalentna svojstva materijala:

$$E^* = \frac{E}{\phi_B^e} \quad \rho^* = \frac{\rho}{\phi_B^e}$$

U tablici 6.4 su prikazane ekvivalentne vrijednosti modula elastičnosti E^* i gustoće ρ^* :

Tablica 6.4 Vrijednosti ekvivalentnih svojstava materijala

Materijal	E GPa	ρ kg/m ³	Faktor oblika ϕ_B^e	Ekvivalentni E^* , GPa	Ekvivalentni ρ^* , kg/m ³
Drvo, balsa	8	270	2	4.0	135.0
Drvo, smreka	15.85	510	2	7.9	255.0
Čelik	210	7850	25	8.4	314.0
AL 7075, T6	72.5	2800	25	2.9	112.0
CFRP	141.5	1565	10	14.2	156.5
Berilij	302.5	1850	15	20.2	123.3
Be 38%Al	189.5	2095	15	12.6	139.7

Primjenom GRANTA EduPack i baze „Level 3” generiran je dijagram „ $\rho - E$ ” s materijalima ograničenim na tablično ponuđene! U dijagramu je ucrtana smjernica za izbor materijala (za indeks $E^{\frac{1}{2}}/\rho$) nagiba 2 (slika 6.3). Na slici 6.4 prikazan je dijagram svojstava materijala s ucrtanim položajem „ekvivalentnih materijala” i jasno istaknutim benefitom (prijelaz materijala referentnog oblika niže učinkovitosti u područje oblikovanog materijala više učinkovitosti).

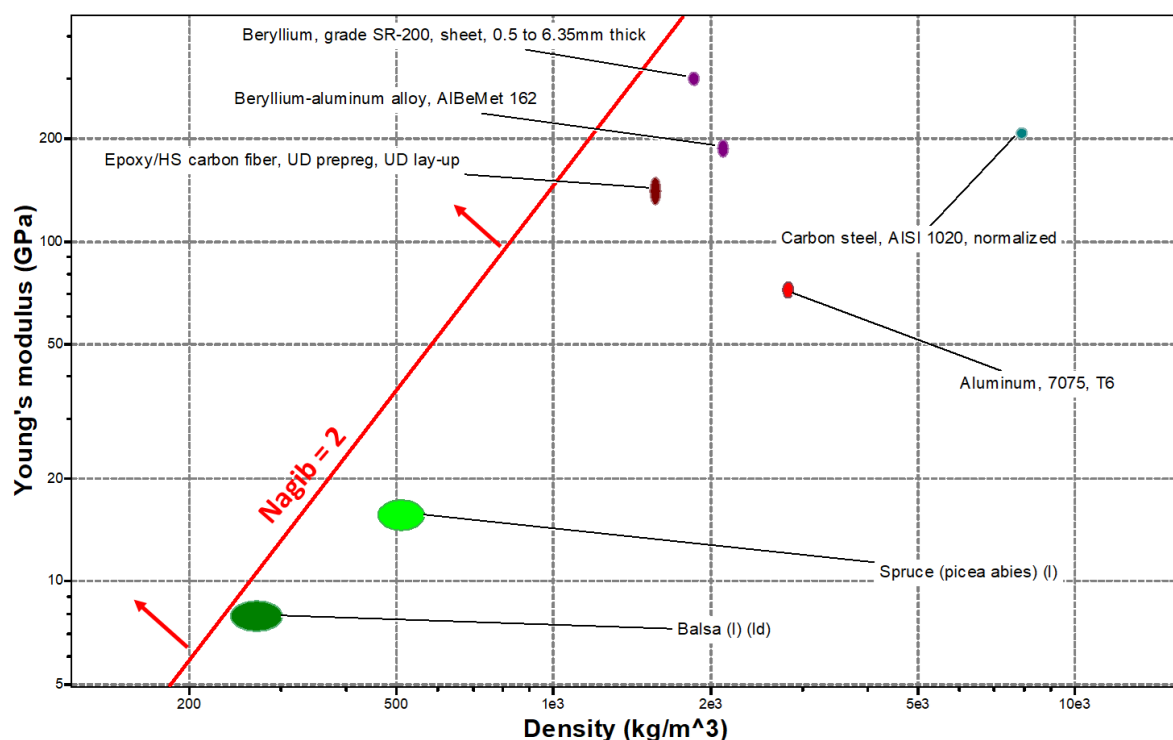
Zašto nestrukturirano drvo ima ovako visoku vrijednost indeksa materijala (neoblikovano drvo ima indeks kao i oblikovani čelik)?

Tajna se krije u celularnoj unutarnjoj mikrostrukтури, što povećava performanse ovog materijala pri savijanju. Ovo je odgovor prirode na strukturiranje materijala. Napredne tehnologije (npr.

vučenje tankostjenih aluminijskih profila) omogućavaju faktore oblika (koji se ne mogu reproducirati kod drva) graničnih performansi (za aluminij $\phi_B^e=40$).

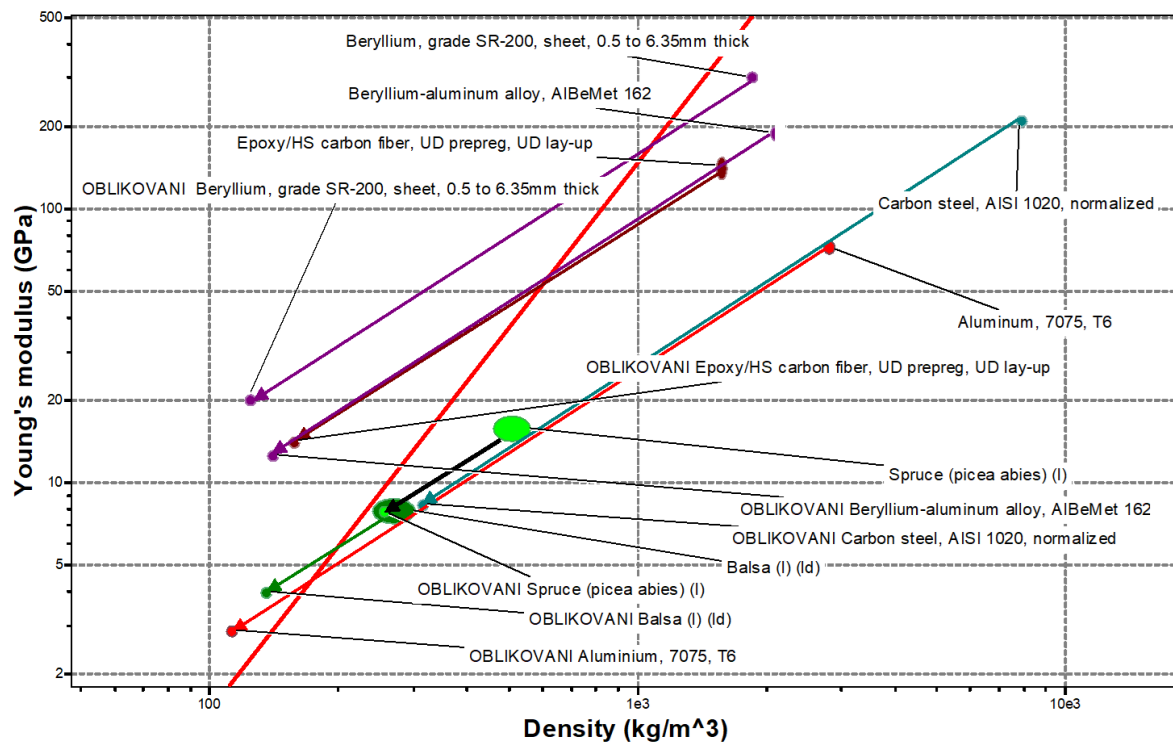
Daljnji napredak traži nove materijale manje gustoće i većih modula – poput CFRP. Oblikovanjem CFRP nadmoćno prelazi performanse ostalih materijala. Ukoliko bi obuhvatili bazu svih materijala i rangirali prema indeksu $E^{\frac{1}{2}}/\rho$ na vrhu liste pojavili bi se dijamant, borova vlakna i berilij (nakon ovih slijede mnoge keramike).

Magnezij i aluminij se nalaze prilično nisko na ljestvici. Iznad aluminija i magnezija nalaze se stakla.



Slika 6.3 Dijagram svojstava materijala $\rho - E$ ograničen na zadane materijale

Većina nabrojanih materijala nije upotrebljiva za glavni nosač krila zbog svoje krhkosti. Međutim, postoje i stakla povišene žilavosti (bor silikatno staklo). Stakla se mogu koristiti kao konstrukcijski elementi, a i lako ih je oblikovati. Velika je prednost i njihova niska cijena. Ipak, indeks za staklo s uključenim faktorom oblika je nedovoljno visok za ovu primjenu.

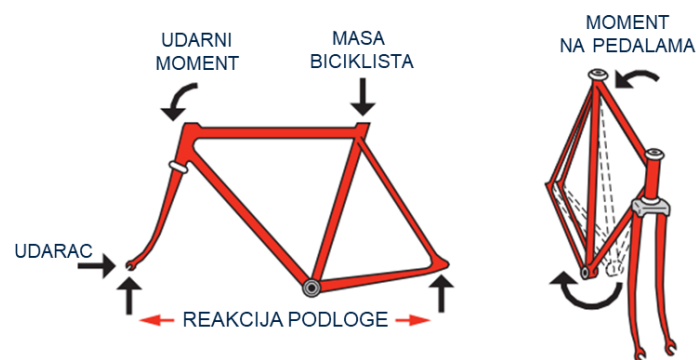


Slika 6.4 Dijagram svojstava materijala $\rho - E$ s ucrtanim „ekvivalentnim materijalima“

6.1.2 Zadatak 2 – Okvir za bicikl

Zadatak

Najvažnije svojstvo koje se prvo razmatra kod okvira bicikla (slika 6.5) je njegova čvrstoća. Važna je i krutost, ali inicijalni kriterij dizajna jest da okvir ne smije kolabirati kod normalne upotrebe. Dominantno opterećenje okvira je na savijanje. Ako se radi o trkaćem biciklu masa dolazi u prvi plan – okvir treba biti što lakši. Okvir se može promatrati kao jednostavna greda duljine L koja mora nositi opterećenje F (ograničenja dizajna) bez plastične deformacije ili loma. Usporediti materijale ponuđene u tablici 6.5 u svrhu izrade okvira sportskog bicikla.



Slika 6.5 Okvir bicikla i opterećenja koje djeluju na okvir

Tablica 6.5 Ponuđeni materijali za izradu okvira bicikla

Materijal	R_p , MPa	ρ , kg/m ³	Faktor oblika ϕ_B^f
Softwood: pine, along grain	40	520	1,4
Bamboo	40	700	2
Low carbon steel	305	7810	4
Age-hardening wrought Al-alloys	250	2700	6
Titanium alloys	896	4610	6
Wrought magnesium alloys	263	1725	4
CFRP	800	1550	4

Rješenje

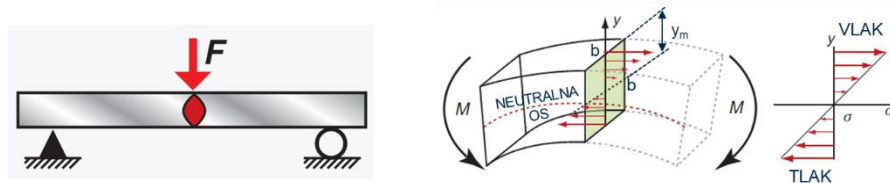
Zahtjevi dizajna za izradu lakog i čvrstog okvira sportskog bicikla sadržani su u tablici 6.6.

Tablica 6.6 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor okvira bicikla

Zahtjevi dizajna za okvir bicikla	
FUNKCIJA	Okvir sportskog bicikla
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina grede L Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Čvrstoća – ne smije doći do oštećenja pod opterećenjem F
CILJ	- Minimalna masa okvira m
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Izbor oblika Izbor površine presjeka grede A

Problem je pojednostavljen na slobodno oslonjenu gredu opterećenu koncentriranim opterećenjem u središnjem dijelu (slika 6.6). Greda je opterećena silom F koja rezultira maksimalnim naprezanjem σ u promatranom presjeku:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{Z} \quad (1)$$



Slika 6.6 Skica opterećenja grede – lijevo; raspodjela naprezanja po presjeku - desno

Kao referentni oblik usvojen je kvadratni presjek grede $b \times b$ pa je moment otpora površine Z_0 :

$$Z_0 = \frac{b_0^3}{6} \Rightarrow Z_0 = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{6} \quad (2)$$

Faktor oblika presjeka za lom uslijed savijanja ϕ_B^f jednak je kvocijentu momenta otpora promatranog presjeka Z i referentnog presjeka Z_0 (jednaka površina $A = A_0$, a različit oblik presjeka):

$$\phi_B^f = \frac{Z}{Z_0} \Rightarrow \phi_B^f = \frac{6 \cdot Z}{A^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

Uređivanje izraza (3) u funkciji aksijalnog momenta otpora Z :

$$Z = \frac{\phi_B^f \cdot A^{\frac{3}{2}}}{6} \quad (4)$$

Uvrštavanjem izraza (4) u izraz (1):

$$\sigma_f = \frac{6 \cdot M}{\phi_B^f \cdot A^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

Slobodna varijabla A iz izraza (5) se prebacuje na lijevu stranu jednadžbe:

$$A = \left(\frac{6 \cdot M}{\phi_B^f \cdot \sigma_f} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (6)$$

Kako je cilj minimalna masa grede, funkcija cilja je:

$$m = A \cdot L \cdot \rho \quad (7)$$

Eliminacijom slobodne varijable iz funkcije cilja, tj uvrštavanjem izraza (6) u izraz (7) dobije se razvijena funkcija cilja:

$$m = (6 \cdot M)^{\frac{2}{3}} \cdot [L] \cdot \left[\frac{\rho}{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (8)$$

Slijedi da je indeks materijala s uključenim faktorom oblika:

$$M_1 = \frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^{\frac{2}{3}}}{\rho} \quad (9)$$

U tablici 6.7 su prikazane izračunate vrijednosti indeksa materijala za referentni i oblikovani presjek.

Tablica 6.7 Indeksi materijala za izbor jeftine grede ograničene krutošću i čvrstoćom

Materijal	R_p MPa	ρ kg/m ³	Faktor oblika ϕ_B^f	$\frac{M}{R_p^{\frac{2}{3}}}$ $\frac{M}{\rho}$	$\frac{M_1}{\rho}$ $\frac{(\phi_B^f \cdot R_p)^{\frac{2}{3}}}{\rho}$
Softwood: pine, along grain	40	520	1.4	0.022	0.028
Bamboo	40	700	2	0.017	0.027
Low carbon steel	305	7810	4	0.006	0.015
Age-hardening wrought Al-alloys	250	2700	6	0.015	0.049
Titanium alloys	896	4610	6	0.020	0.067
Wrought magnesium alloys	263	1725	4	0.024	0.060
CFRP	800	1550	4	0.056	0.140

Iz tablice 6.7 je vidljivo da je, ukoliko se okvir izrađuje iz punog presjeka, najpovoljniji odabir drvo – smreka. Bambus je specifičan jer raste (prirodno strukturirani) kao šuplja cijev sa makroskopskim faktorom $\phi_B^f = 2,2$. Ako se doda utjecaj oblikovanja ostalim materijalima redoslijed se mijenja. Sada je i čelik dobar izbor, titan je bolji. Najbolji odabir makro strukturiranog materijala jest CFRP. Magnezijeve legure, unatoč niskoj gustoći, su loši za dizajn limitiran čvrstoćom. Okviri bicikla su se radili iz svih materijala navedenih u tablici 6.7. Okviri današnjih sportskih bicikla se rade iz čelika, aluminija i CFRP-a kojemu se ponekad dodaju staklena vlakana ili aramid (kevlar).

Brdski bicikli, za koje je čvrstoća i udarna žilavost naročito važna, imaju okvir izrađen iz čelika ili titana. Na prvi pogled čini se prilično gruba interpretacija opterećenja i geometrije u funkciji cilja. Detaljna razrada funkcionalnih zahtjeva i zahtjeva geometrije ne utječe na matricu svojstava materijala (indeks materijala ostaje nepromijenjen).

Ekvivalentne vrijednosti svojstava oblikovanog presjeka se dobiju ako se brojnik i nazivnik indeksa materijala (9) podijeli s $\phi_B^{f^2}$:

$$M_1 = \frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^{\frac{2}{3}}}{\rho} : (\phi_B^f)^2 = \frac{\left[\frac{\sigma_f}{(\phi_B^f)^2} \right]^{\frac{2}{3}}}{\frac{\rho}{(\phi_B^f)^2}} = \frac{(\sigma_f^*)^{\frac{2}{3}}}{\rho^*} \quad (10)$$

Ekvivalentne vrijednosti (uzevši u obzir makro strukturiranje tj. oblik) čvrstoće i gustoće materijala, za laku gredu i dizajn ograničen čvrstoćom, su:

$$\sigma_f^* = \frac{\sigma_f}{(\phi_B^f)^2} \quad \rho^* = \frac{\rho}{(\phi_B^f)^2} \quad (10)$$

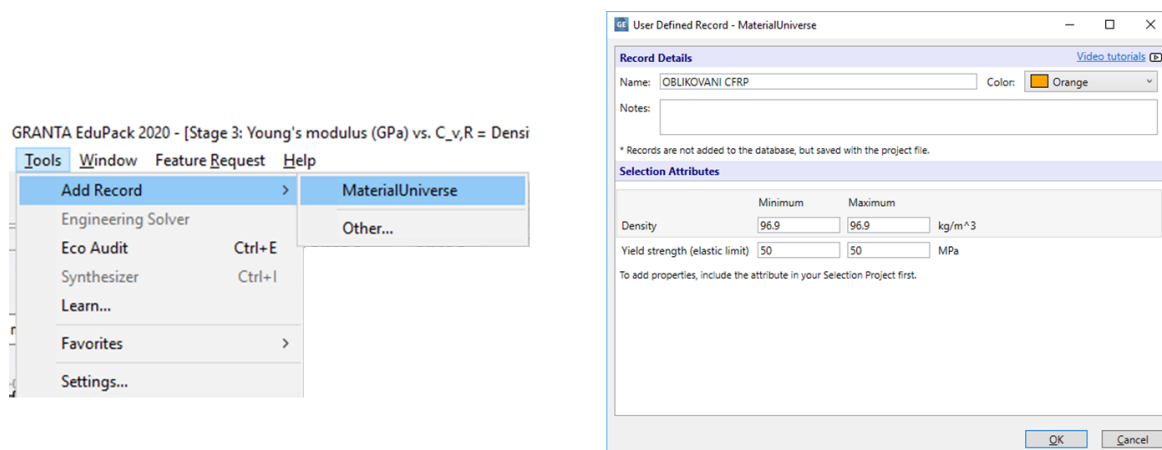
Dobivene vrijednosti ekvivalentnih svojstava su prikazane u tablici 6.8.

Tablica 6.8 Ekvivalentna svojstva materijala

Materijal	R_p MPa	ρ kg/m ³	ϕ_B^f	$\sigma_f^* = \frac{\sigma_f}{(\phi_B^f)^2}$	$\rho^* = \frac{\rho}{(\phi_B^f)^2}$
CFRP	800	1550	4	50.0	96.9
Titanium alloys	896	4610	6	24.9	128.1
Wrought magnesium alloys	263	1725	4	16.4	107.8
Age-hardening wrought Al-alloys	250	2700	6	6.9	75.0
Softwood: pine, along grain	40	520	1.4	20.4	265.3
Bamboo	40	700	2	10.0	175.0
Low carbon steel	305	7810	4	19.1	488.1

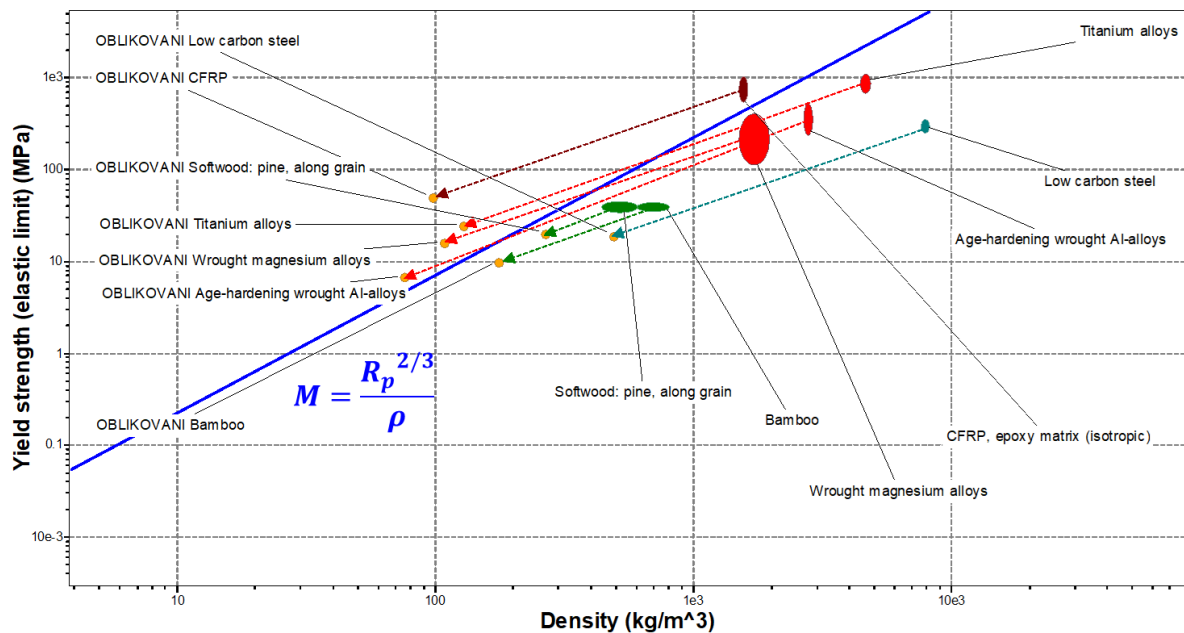
Kako bi ekvivalentne materijale prikazali u dijagramu svojstava materijala iste treba kreirati u bazi Granta EduPack. Postupak dodavanja novih (ekvivalentnih materijala u bazi je prikazan na slici 6.7. Iz alatne trake treba otvoriti padajući izbornik „Tools“ i odabrati naredbu „Add

records – MaterialUniverse“. U otvorenom prozoru upisati naziv novog materijala te odabrati svojstva čije vrijednosti treba unijeti (ekvivalentna čvrstoća i ekvivalentna gustoća materijala). Nakon unosa vrijednosti svojstava unos se potvrđuje pritiskom na gumb „OK“. Na slici 6.7-desno je prikazan primjer dodavanja zapisa za oblikovani CFRP. Isti postupak ponoviti za sve materijale iz ponuđene grupe.



Slika 6.7 Kreiranje novog zapisa (ekvivalentnog materijala) u bazi Granta EduPack

U dijagramu na slici 6.8 prikazani su i označeni ekvivalentni i zadani materijali. Učrtana je smjernica za izbor materijala nagiba $3/2$. Na koncu su linijama sa strelicom povezani odgovarajući zadani i ekvivalentni materijali čime je nedvosmisleno ukazano na porast učinkovitosti primjene materijala oblikovanjem presjeka. U dijagramu se da uočiti da je linija koja povezuje zadani i oblikovani bambus gotovo paralelna smjernici za izbor materijala. Razlog je relativno mala vrijednost faktora oblika (bambus već u izvornom stanju ima prirodno visoki faktor tako da se dodatnim oblikovanjem isti ne može značajno povećati).

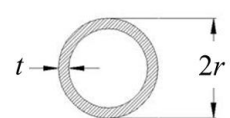


Slika 6.8 Dijagram svojstava materijala „ $\rho - \sigma_f$ “

6.1.3 Zadatak 3 – Nogice stolića - vitke ili lagane

Zadatak

Odabrati materijal / oblik iz raspoložive baze podataka (421 kombinacija materijal/oblik) za lake nogice stolića poprečnog presjeka oblika kružnog vijenca prema slici. Slobodne veličine za izbor su radijus r i debljine stjenke t .



Nogica duljine $L = 1$ m mora podržavati tlačno opterećenje od $m = 50$ kg bez pojave elastičnog izvijanja.

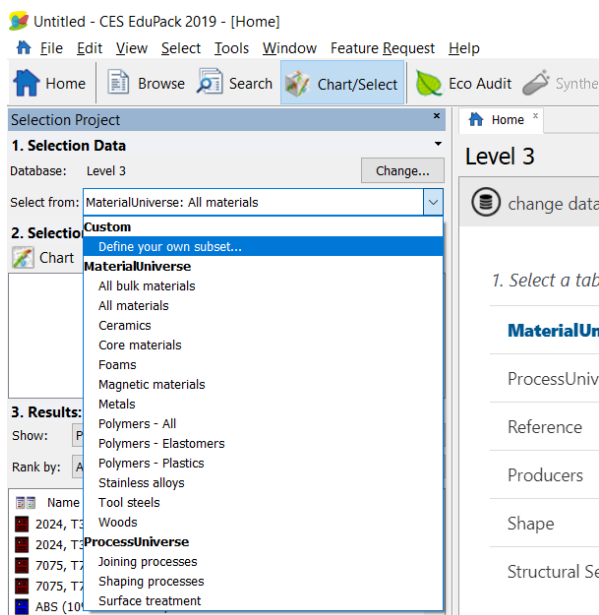
Rješenje

Zahtjevi dizajna za izradu lakih i vitkih nogica stolića sadržani su u tablici 6.9.

Tablica 6.9 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor nogica stolića

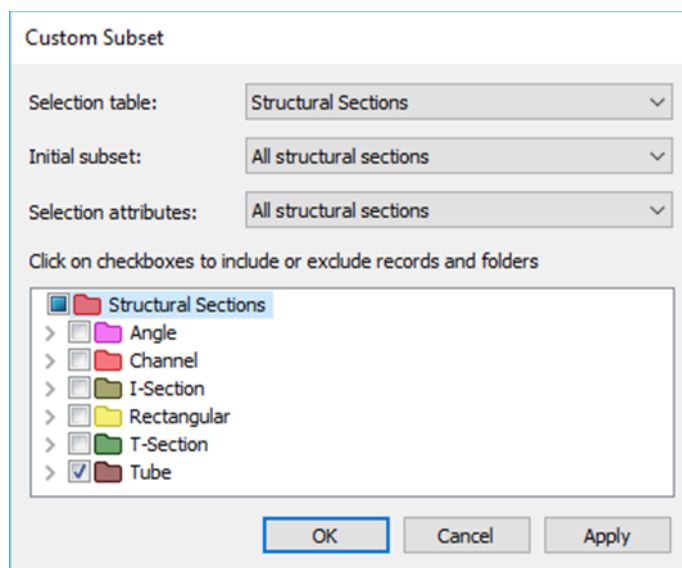
Zahtjevi dizajna za nogice stolića	
FUNKCIJA	Lake i vitke nogice stolića
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina grede $L = 1$ m - Specificirano opterećenje svake nogice $m = 50$ kg Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Elastična stabilnost (izvijanje) – ne smije doći do elastičnog izvijanja pod opterećenjem F
CILJ	- Minimalna masa nogice - Minimalni radijus nogice
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Izbor oblika Izbor površine presjeka nogice stolića A

Zadatak se rješava primjenom Granta EduPack programa. Prvi korak je odabir nivoa baze podataka „Level 3“. Iz alatne trake se bira gumb „Chart/Select“. U otvorenom prozoru najprije se odabire dio baze podataka s konstrukcijskim oblicima presjeka izborom opcije „Define your own subset...“ u okviru polja „Select from“ (slika 6.9). Iz tablice za izbor odabire se baza podataka „Structural Sections“. U donjem prozoru odabiru se traženi oblici (u ovom primjeru „Tube“) – slika 6.9.



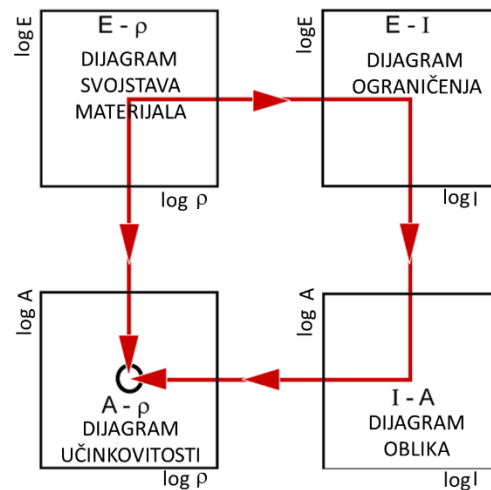
Slika 6.9 Izbor dijela baze podataka

U prozoru „Custom subset“ u izboru „Selection table“ odabrati dio baze podataka „Structural Sections“ (slika 6.10). Obzirom da je u zadatku ograničenje na oblik poprečnog presjeka – kružni vijenac u donjem dijelu prozora označavaju se samo oblici „Tube“. Ostali oblici ostaju neoznačeni.



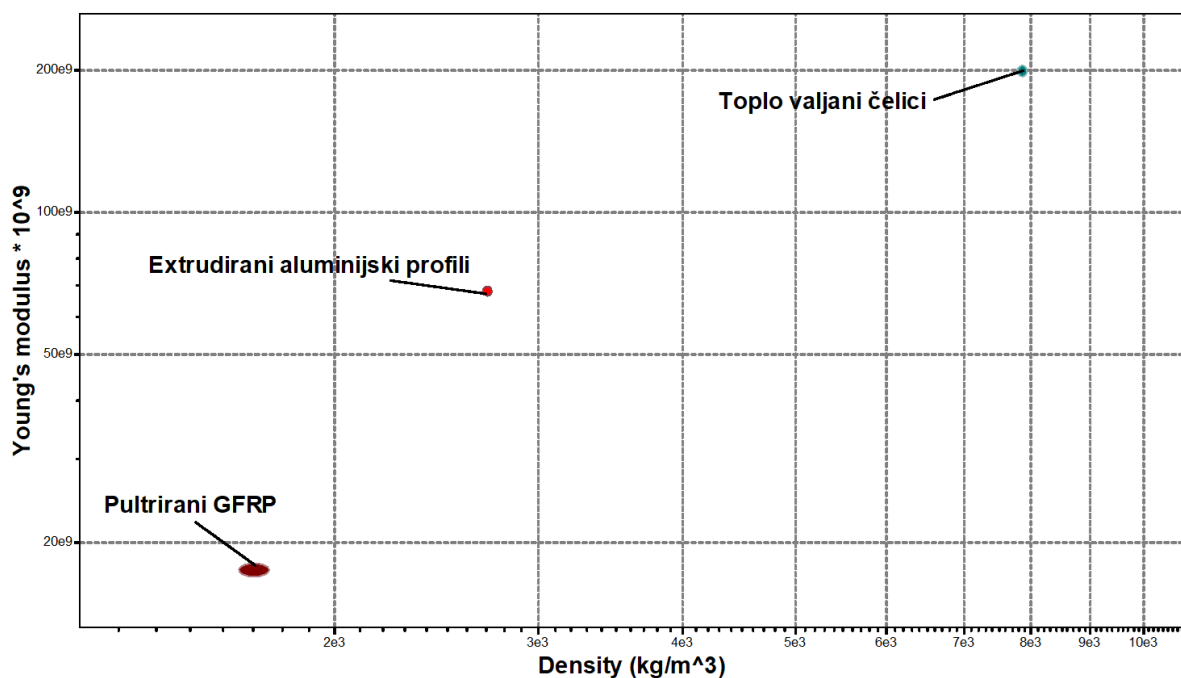
Slika 6.10 Izbornik „Custom subset – Structural Sections“

Kako bi se izvršila pretraživanje najbolje kombinacije materijala i oblika za vitke nogice stolića koristi se „metoda četiri dijagrama“ shematski prikazana na slici 6.11.



Slika 6.11 Primjena metode četiri dijagrama uz ograničenje krutosti materijala

Najprije se generira odgovarajući dijagram svojstava materijala (prvi kvadrant na slici 6.11) za slučaj ograničenja elastične stabilnosti „ $E - \rho$ “ – slika 6.12. U dijagramu se uočavaju samo 3 materijala. Razlog ovoga je ograničenje raspoložive edukacijske baze podataka.



Slika 6.12 Dijagram svojstava materijala „ $E - \rho$ “

Drugi dijagram kojeg treba generirati jest dijagram učinkovitosti oblika (treći kvadrant na slici 6.11) koji za slučaj izvijanja ima os apscisu minimalni aksijalni moment inercije I_{min} , a os ordinatu površinu poprečnog presjeka A (slika 6.13). U dijagramu su ucrtane linije konstantnih

vrijednosti faktora oblika. Postupak određivanja nagiba ovih linija i njihovog pozicioniranja se vrši počevši od izraza za faktor oblika za elastično izvijanje:

$$\phi_B^e = \frac{12 \cdot I_{min}}{A^2} \quad (1)$$

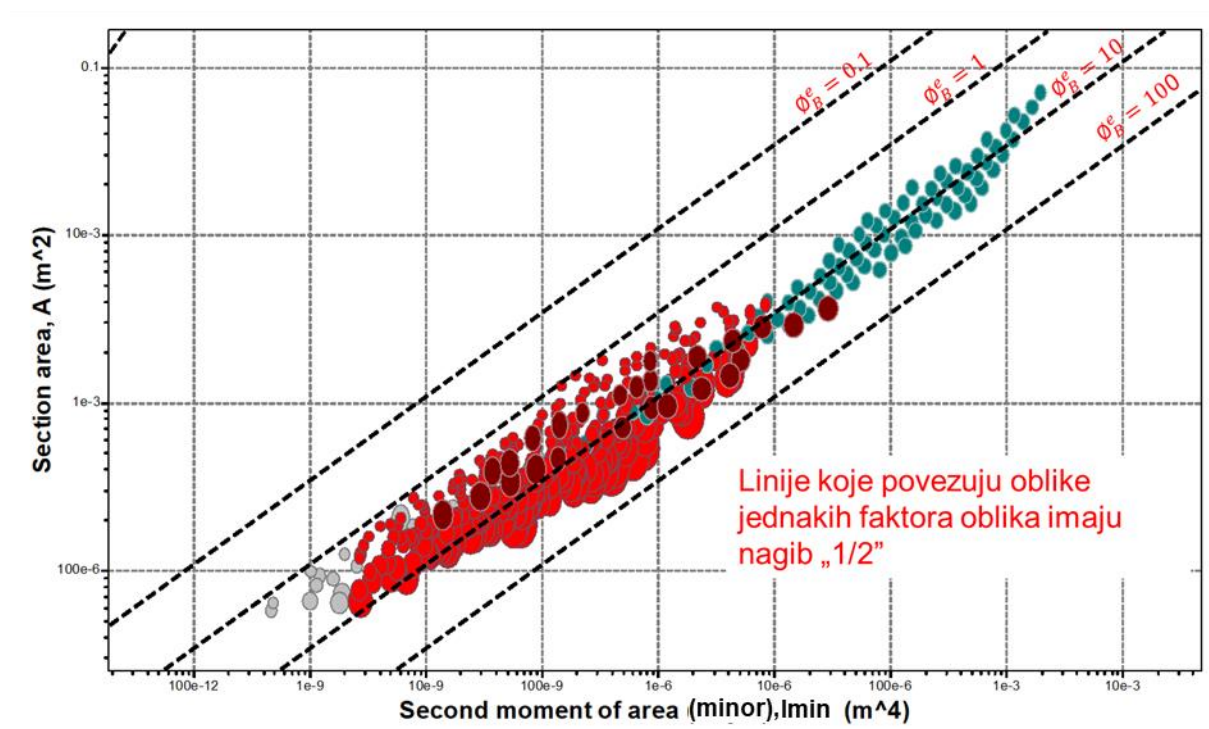
Ovaj izraz treba prilagoditi eksplicitnom obliku jednadžbe pravca u dijagramu učinkovitosti oblika pa slijedi:

$$A = I_{min}^{1/2} \cdot \left(\frac{12}{\phi_B^e} \right)^{1/2} \quad (2)$$

Logaritmiranjem izraza (2) dobiva se traženi oblik jednadžbe pravca:

$$\log A = \frac{1}{2} \cdot \log I_{min} + \frac{1}{2} \cdot \log \frac{12}{\phi_B^e} \quad (3)$$

Prema izrazu (3) proizlazi da linije konstantnih faktora oblika imaju nagib „1/2“, dok se vrijednost indeksa potrebnog za pozicioniranje linija u dijagramu određuje kao kvocijent $\frac{12}{\phi_B^e}$. U dijagramu su ucrtane linije za vrijednosti faktora oblika: 0.1, 1, 10 i 100.



Slika 6.13 Dijagram učinkovitosti oblika „ $I_{min} - A$ “

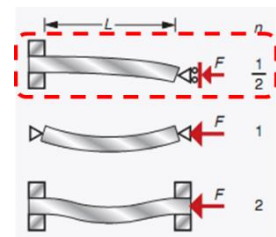
Nogice stolića su opterećene na izvijanje aksijalnim opterećenjem od 50 kg. Koristeći Eulerov izraz za kritičnu silu izvijanja (ograničenje):

$$F_{krit} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L^2} \quad (4)$$

Obzirom da je ograničenje elastična stabilnost krutost nogice je ključno svojstvo i za zadani primjer iznosi:

$$E \cdot I_{min} = \frac{F_{krit} \cdot L^2}{n^2 \cdot \pi^2} = \frac{500 \cdot 1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi^2} \approx 200 \text{ Nm}^2 \quad (5)$$

Gdje je „ n “ broj formi izvijanja koje se određuju prema načinu učvršćenja štapa. Na slici desno je prikazan isječak priručnika s korisnim rješenjima na temelju kojega se može odrediti veličina „ n “.



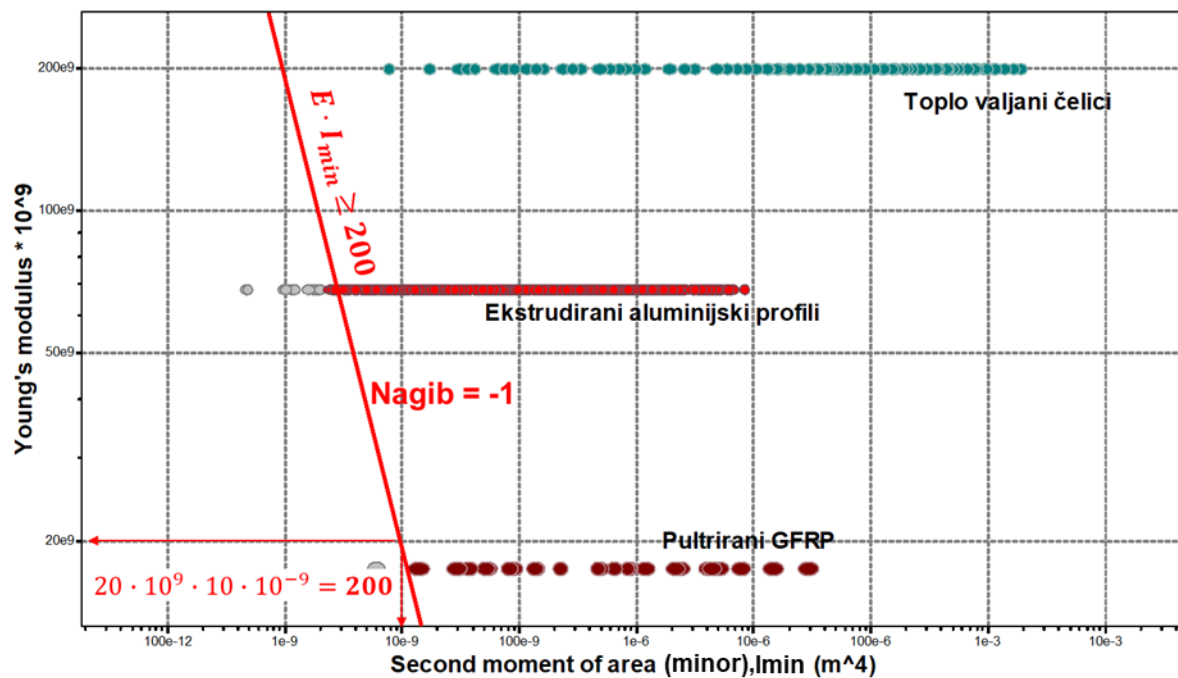
Treći dijagram kojeg treba generirati je dijagram ograničenja (drugi kvadrant na slici 6.11). Osi dijagrama moraju biti kompatibilne sa susjednim dijagramima. Apscisa dijagrama ograničenja je aksijalni moment inercije, a ordinata modul elastičnosti (slika 6.14). U dijagramu su ucrtane linije ograničenja. Crvena linija jest ograničenje minimalne krutosti materijala i oblika dobivene prethodnim proračunom. Položaj ove linije u dijagramu ograničenja određuje se počevši od izraza za samo ograničenje:

$$E \cdot I_{min} = 200 \text{ Nm}^2 \quad (6)$$

Izraz (5) treba prikazati eksplicitnom obliku jednadžbe pravca prilagođene dijagramu ograničenja:

$$\log E = -1 \cdot \log I_{min} + \log 200 \quad (7)$$

Prema izrazu (7) proizlazi da linija ograničenja ima nagib „ -1 “, dok je vrijednost indeksa potrebnog za pozicioniranje linije u dijagramu ograničenja jednaka 200. Pri ucrtavanju linije ograničenja potrebno je voditi računa da mjerne jedinice osiju dijagrama trebaju biti kompatibilne mjernoj jedinici proračunatog ograničenja prema izrazu (5). Materijali koji zadovoljavaju ograničenje nalaze se desno od ucrtane crvene linije.

Slika 6.14 Dijagram ograničenja „ $I_{min} - E$ “

Četvrti dijagram koji treba generirati (četvrti kvadrant na slici 6.11) jest dijagram učinkovitosti materijala i oblika (slika 6.15). U dijagramu je ucrtana linija crvene boje za izbor najučinkovitije kombinacije materijala i oblika.

Položaj ove linije u dijagramu učinkovitosti materijala i oblika određuje se počevši od izraza za cilj:

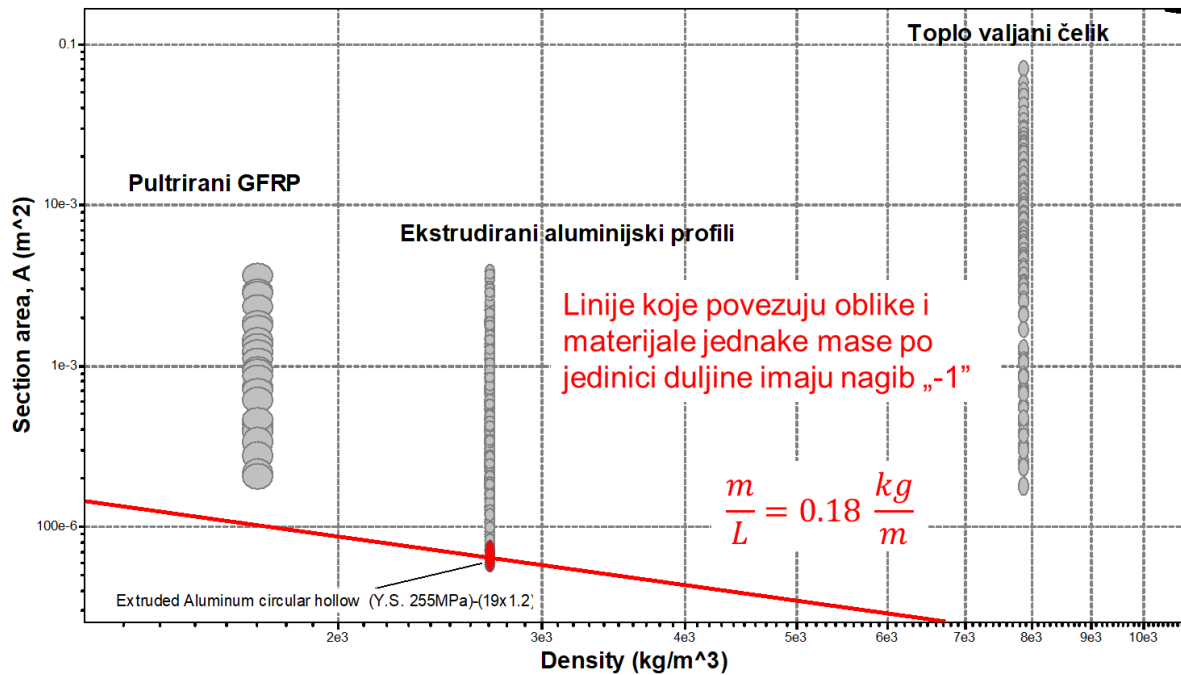
$$m = A \cdot l \cdot \rho \quad (8)$$

Prikaz izraza (8) u eksplicitnom obliku jednadžbe pravca prilagođene dijagramu:

$$\log A = -1 \cdot \log \rho + \log \frac{m}{l} \quad (9)$$

Prema izrazu (9) linija za izbor najučinkovitije kombinacije materijal-oblik ima nagib „ -1 “, dok vrijednost indeksa koji se može očitati pomicanjem ove linije u dijagramu predstavlja specifičnu masu profila $\frac{m}{l}$. Izbor se optimira pomicanjem linije u područje minimalnih vrijednosti $\frac{m}{l}$ tj. prema donjem lijevom kutu dijagrama.

Vrijednost učinkovitosti (kvocijent $\frac{m}{l}$) se može očitati kao indeks koji se prikazuje u donjem lijevom dijelu prozora programa. Najbolja kombinacija materijala i oblika za laku i stabilnu nogicu je cijev dimenzije $\emptyset 19 \times 1.2$ mm iz legure aluminija granice tečenja $R_p = 255$ MPa. Specifična masa odabrane kombinacije iznosi 0,18 kg/m.



Slika 6.15 Dijagram učinkovitosti materijala i oblika

Ukoliko je cilj maksimalna vitkost nogice u dijagramu učinkovitosti oblika (slika 6.16) treba ucrtnuti liniju koja povezuje konstantne vrijednosti radijusa nogice. Određivanja nagiba ove linije i značenja indeksa može se započeti približnim izrazima za površinu i aksijalni moment inercije presjeka kružnog vijenca:

$$A \approx 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \quad I \approx \pi \cdot r^3 \cdot t \quad (10)$$

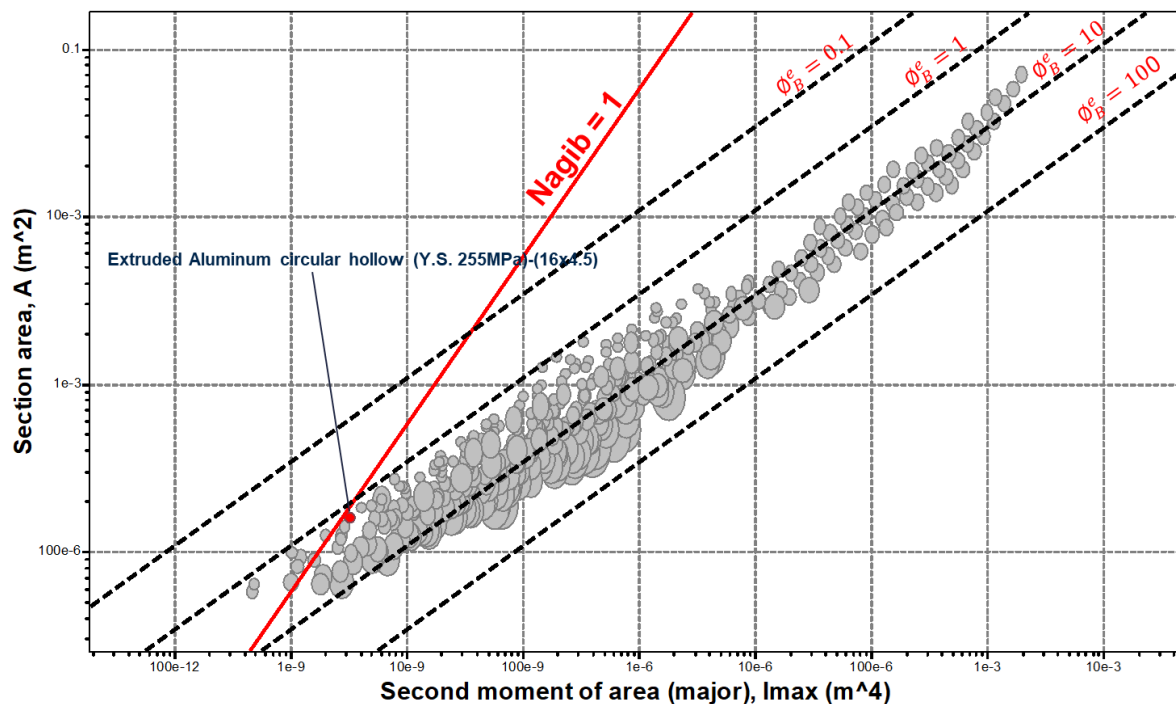
Kombinacijom gornja dva izraza i eliminacijom debljine stjenke „t“:

$$r = \left(\frac{2 \cdot I}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

Prikaz izraza (11) u eksplicitnom obliku jednadžbe pravca prilagođene dijagramu učinkovitosti oblika:

$$\log A = 1 \cdot \log I + \log \frac{2}{r^2} \quad (12)$$

Prema izrazu (12) linija za izbor kombinacije materijal-oblik za vitke nogice stolića ima nagib „1“, dok je vrijednost indeksa koji se može očitati pomicanjem ove linije u dijagramu $\frac{2}{r^2}$. Pomicanjem linije u smjeru maksimalizacije indeksa izolira se najučinkovitija kombinacija materijala i oblika koji je u ovom slučaju cijev dimenzije $\varnothing 16 \times 4.5$ mm iz legure aluminija granice tečenja $R_p = 255$ MPa. Specifična masa odabrane kombinacije je znatno veća u odnosu kada je cilj minimalizacija mase i iznosi 0,43 kg/m.



Slika 6.16 Dijagram učinkovitosti oblika s ucrtanom linijom za maksimalizaciju vitkosti

6.1.4 Zadatak 4 – Podne nosive grede

Uvod

Grede u kućama i zgradama se koriste kao nosivi elementi podne konstrukcije, one premošćuju raspon između zidova (slika 6.17). Pretpostavka je da podna greda nosi određeno opterećenje na savijanje, bez pretjeranog ugibanja (krutost) ili loma (čvrstoća). Greda treba biti i jeftina. Tradicionalno, grede su izrađene iz drva pravokutnog oblika sa odnosom dimenzija $\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$ što daje faktor oblika $\phi_B^e = 2$. U Aziji seosko stanovništvo kao tradicionalni materijal koristi bambus s „prirodnim” faktorom oblika $\phi_B^e = 3.2$. Bambus ovdje predstavlja zamjenu za drvo. Kako je vremenom šumski fond bitno smanjen, a zgrade su postajale sve veće (veliki rasponi), čelik je sve više zamjenjivao drvo i bambus kao primarni konstrukcijski materijal.



Slika 6.17 Građevinske konstrukcije iz različitih materijala

Standardna čelična greda „I-profila” ima faktor oblika u rasponu od $5 < \phi_B^e < 25$ (specijalni I-profilu mogu imati znatno veću vrijednost).

Zadatak

Izvršiti analizu učinkovitosti materijala i oblika za izradu jeftinih podnih greda. Svojstva i faktori oblici navedenih materijala prikazani su u tablici 6.10. Zadatak riješiti:

- Odrediti indekse materijala referentnog i oblikovanog presjeka uz ograničenje krutosti;
- Odrediti indekse materijala referentnog i oblikovanog presjeka uz ograničenje čvrstoće.

U dijagramima svojstava materijala istaknuti položaj materijala referentnog oblika i za materijale oblikovanih poprečnih presjeka, te ucrtati smjernicu za izbor na način da se neupitno istakne povećanje učinkovitosti primjene oblikovanih materijala.

Tablica 6.10 Materijali i svojstva materijala za izradu podnih greda

Materijal	E GPa	ρ kg/m ³	C_m €/kg	R_p MPa	ϕ_B^e	ϕ_B^f
Softwood: pine, along grain	9,35	520	0.83	40	2	1,4
Bamboo	14.3	700	1.5	40	3,2	2
Low carbon steel	210	7810	0.68	305	15	4

Rješenje

Zahtjevi dizajna su prikazani u tablici 6.11.

Tablica 6.11 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor podne grede

Zahtjevi dizajna za podne grede	
FUNKCIJA	Jeftina podna greda
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina grede $L = 1$ m Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje a) Krutost S – ne smije doći do prevelikog progiba pod projektnim opterećenjem b) Čvrstoća σ_f – ne smije doći do trajne deformacije ili loma pod opterećenjem
CILJ	- Minimalna cijena
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Izbor oblika Izbor površine presjeka grede A

a) Indeksi materijala referentnog i oblikovanog presjeka uz ograničenje krutosti

Obzirom da je, prema tablici sa zahtjevima dizajna, cilj minimalizacija cijene funkcija cilja je:

$$C = A \cdot L \cdot \rho \cdot C_m \quad (1)$$

Faktor oblika presjeka za krutost grede ϕ_B^e jednak je kvocijentu aksijalnog momenta inercije oblikovanog presjeka I i referentnog presjeka I_0 (jednaka površina $A = A_0$, a različit oblik presjeka):

$$\phi_B^e = \frac{I}{I_0} \quad \Rightarrow \quad \phi_B^e = \frac{12 \cdot I}{A^2} \quad (2)$$

Uređivanje izraza (3) u funkciji aksijalnog momenta otpora Z :

$$I = \frac{\phi_B^e \cdot A^2}{12} \quad (3)$$

Za slučaj kada je ograničenje krutost grede vrijedi izraz:

$$S = \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (4)$$

Uvrštavanjem izraza (3) u izraz (4):

$$S = \frac{C_1}{12} \cdot \frac{E}{L^3} \cdot \phi_B^e \cdot A^2 \quad (5)$$

Slobodna varijabla A iz izraza (5) se prebacuje na lijevu stranu jednadžbe:

$$A = \left(\frac{12 \cdot L^3 \cdot S}{C_1 \cdot E \cdot \phi_B^e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Eliminacijom slobodne varijable iz funkcije cilja, tj uvrštavanjem izraza (6) u izraz (1) dobije se razvijena funkcija cilja:

$$C = \left(\frac{12 \cdot S}{C_1} \right) \cdot L^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{\rho \cdot C_m}{(\phi_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

Slijedi da je indeks materijala za jeftinu gredu s uključenim faktorom oblika u slučaju dizajna ograničenog krutošću:

$$M_1 = \frac{(\phi_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}}{\rho \cdot C_m} \quad (8)$$

U tablici 6.12 su prikazani izračunate vrijednosti indeksa materijala za ograničenje krutosti s i bez uključenog faktora oblika.

Najbolji izbor materijala je istaknut crvenom bojom. Ukoliko je faktor oblika nije uključen u indeks materijala, najbolji izbor je „Softwood: pine, along grain“, međutim, ako se u indeks materijala uključi faktor oblika, izbor se mijenja i najbolji izbor je „Low carbon steel“.

Tablica 6.12 Indeksi materijala bez i s uključenim faktorom oblika uz ograničenje krutosti

Materijal	ϕ_B^e	$M_{01} = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{\rho \cdot C_m}$	$M_1 = \frac{(\phi_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}}{\rho \cdot C_m}$
Softwood: pine, along grain	2	0.00094	0.00133
Bamboo	3,2	0.00048	0.00086
Low carbon steel	15	0.00036	0.00140

Ekvivalentna svojstva materijala dobiju se ako se brojnik i nazivnik indeksa materijala (8) podjele s ϕ_B^e :

$$M_1 = \frac{(\phi_B^e \cdot E)^{\frac{1}{2}}}{\rho \cdot C_m} : \phi_B^e = \frac{\left(\frac{E}{\phi_B^e}\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho \cdot (C_m / \phi_B^e)} = \frac{(E^*)^{\frac{1}{2}}}{\rho \cdot C_m^*} \quad (9)$$

Odavde slijede ekvivalentna svojstva materijala:

$$E^* = \frac{E}{\phi_B^e} \quad \text{i} \quad C_m^* = \frac{C_m}{\phi_B^e} \quad (10)$$

Uobičajeno je da se, radi fluktuacije cijena materijala na tržištu, promatra relativni porast cijena u odnosu na neki referentni materijal (npr. čelik), pa se onda nazivnik izraza (9) može pisati:

$$C_{v,R} = \frac{\rho \cdot C_m}{(\rho \cdot C_m)_{\text{čELIK}}} \quad (11)$$

gdje je $C_{v,R}$ relativna cijena po jedinici volumena.

Ekvivalentna relativna cijena po jedinici volumena je:

$$C_{v,R}^* = \frac{(\rho \cdot C_m)^*}{(\rho \cdot C_m)_{\text{čELIK}}} \quad (12)$$

Za ekvivalentni materijal je usvojen čelik sa svojstvima:

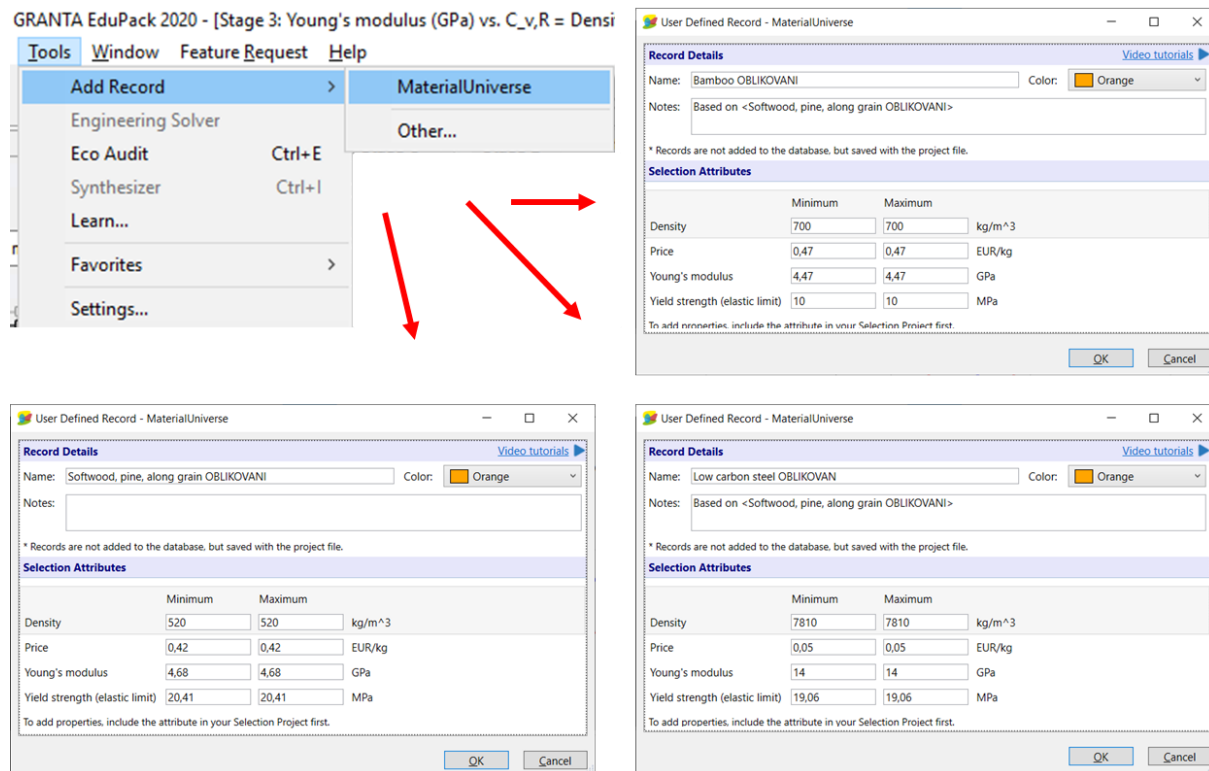
$$\rho_{\text{č}} = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad C_{m,\text{č}} = 0,655 \text{ €/kg} \quad (13)$$

Konačno, u tablici 6.13 su prikazane brojčane vrijednosti ekvivalentnih svojstava materijala. Može se primijetiti da ekvivalentna svojstva (oblikovani presjeci) imaju manje vrijednosti od svojstava referentnog oblika presjeka.

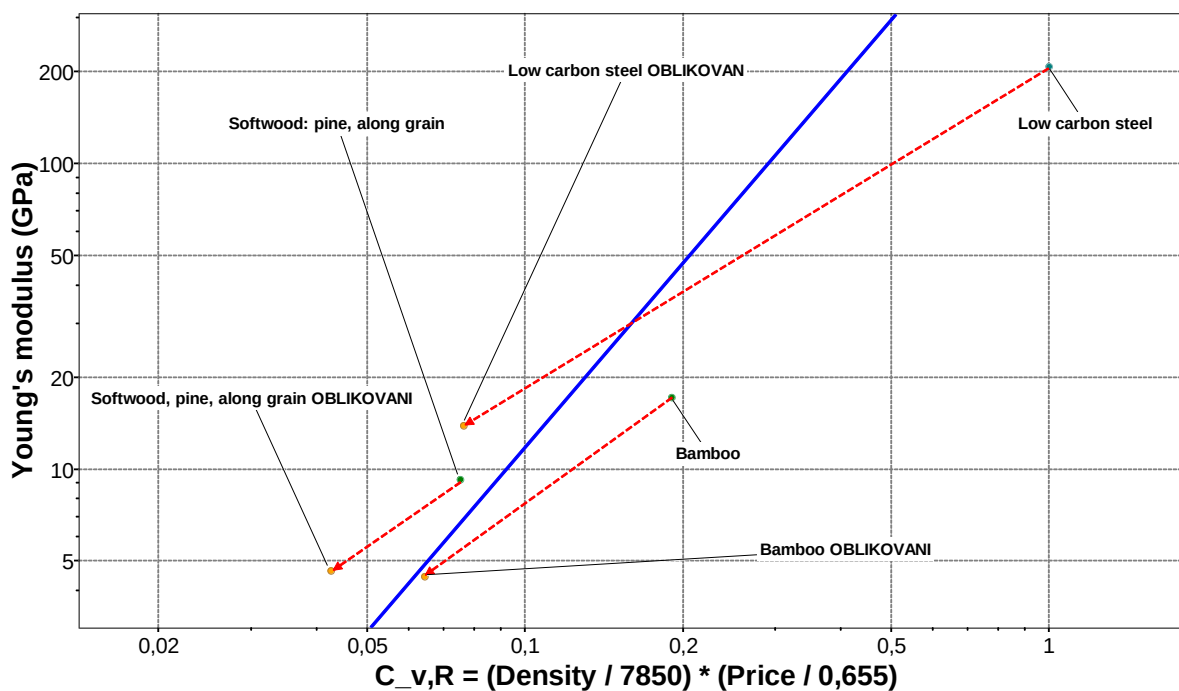
Tablica 6.13 Vrijednosti ekvivalentnih svojstava materijala za ograničenje krutosti

Materijal	E GPa	ρ kg/m ³	C_m €/kg	ϕ_B^e	E^* GPa	C_m^* —
Softwood: pine, along grain	9.35	520	0.83	2	4.68	0.42
Bamboo	14.3	700	1.5	3.2	4.47	0.47
Low carbon steel	210	7810	0.68	15	14	0.05
Materijal	$\rho \cdot C_m$	$\rho \cdot C_m^*$	$C_{v,R} = \frac{\rho \cdot C_m}{(\rho \cdot C_m)_\zeta}$		$C_{v,R}^* = \frac{\rho \cdot C_m^*}{(\rho \cdot C_m)_\zeta}$	
Softwood: pine, along grain	431.6	216	0.084		0.042	
Bamboo	1050	328	0.204		0.064	
Low carbon steel	5310.8	354	1.033		0.069	

Dobiveni rezultati prikazani su i u dijagramu svojstava materijala (slika 6.19) koji na osi apscisa ima relativnu cijenu po jedinici volumena $\frac{\rho \cdot C_m^*}{(\rho \cdot C_m)_\zeta}$, dok je os ordinata modul elastičnosti materijala E . U bazu podataka su dodani novi zapisi (records) s „ekvivalentnim materijalima“, a kako bi se mogao vizualizirati porast učinkovitosti oblikovanjem presjeka u dijagramu svojstava materijala. Postupak dodavanja novih zapisa prikazan je na slici 6.18. Podaci za „ekvivalentne materijale“ su preuzeti iz tablice 6.13 i tablice 6.15. Na slici 6.19 prikazan je dijagram svojstava materijala „ $E - C_{v,R}$ “ u kojem su prikazani zadani i ekvivalentni materijali međusobno povezani crvenim crtkanim linijama sa strelicama. Plavom punom linijom prikazana je smjernica za izbor materijala nagiba „2“, prema indeksu materijala u izrazu (8). Za uočiti je da sve crtkane crvene linije imaju manji nagib od smjernice te da se zadani materijali nalaze u području manje učinkovitosti od ekvivalentnih materijala (oblikovanog poprečnog presjeka). Najviše je položena crvena crtkana linija koja odgovara nisko ugljičnom čeliku iz razloga jer ovaj materijal ima najveći faktor oblika.



Slika 6.18 Izrada novih zapisa za „ekvivalentne materijale“

Slika 6.19 Dijagram svojstava materijala „E – $C_{v,R}$ “

b) Indeksi materijala referentnog i oblikovanog presjeka uz ograničenje čvrstoće

Faktor oblika presjeka za oštećenje grede uslijed savijanja ϕ_B^f jednak je kvocijentu momenta otpora promatranog presjeka Z i referentnog presjeka Z_0 (jednaka površina $A = A_0$, a različit oblik presjeka):

$$\phi_B^f = \frac{Z}{Z_0} \Rightarrow \phi_B^f = \frac{6 \cdot Z}{A^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

Uređivanje izraza (9) u funkciji aksijalnog momenta otpora Z :

$$Z = \frac{\phi_B^f \cdot A^{\frac{3}{2}}}{6} \quad (10)$$

Za slučaj kada je ograničenje čvrstoća grede vrijedi:

$$\sigma_f = \frac{M}{Z} \quad (11)$$

Uvrštavanjem izraza (10) u izraz (11):

$$\sigma_f = \frac{6 \cdot M}{\phi_B^f \cdot A^{\frac{3}{2}}} \quad (12)$$

Slobodna varijabla A iz izraza (12) se prebacuje na lijevu stranu jednadžbe:

$$A = \left(\frac{6 \cdot M}{\phi_B^f \cdot \sigma_f} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (13)$$

Eliminacijom slobodne varijable iz funkcije cilja, tj uvrštavanjem izraza (6) u izraz (7) dobije se razvijena funkcija cilja:

$$C = \left(\frac{6 \cdot F_f}{C_2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{\rho \cdot C_m}{\left(\phi_B^f \cdot \sigma_f \right)^{\frac{2}{3}}} \quad (14)$$

Slijedi da je indeks materijala za jeftinu gredu s uključenim faktorom oblika u slučaju dizajna ograničenog čvrstoćom:

$$M_2 = \frac{\left(\phi_B^f \cdot \sigma_f \right)^{\frac{2}{3}}}{\rho \cdot C_m} \quad (15)$$

U tablici 6.14 su prikazani izračunate vrijednosti indeksa materijala za ograničenje čvrstoće s i bez uključenog faktora oblika.

Najbolji izbor materijala je istaknut crvenom bojom. U ovom slučaju najbolji je izbor „Softwood: pine, along grain“ neovisno o tome dali je faktor oblika uključen u indeks materijala.

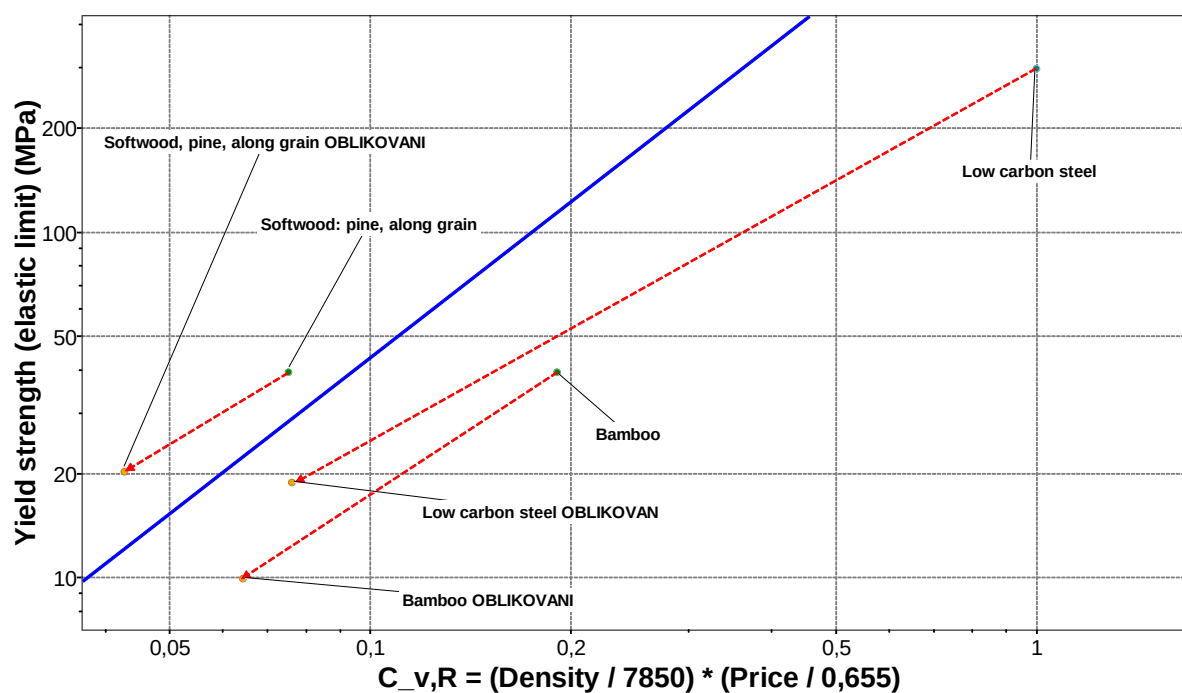
Tablica 6.14 Indeksi materijala bez i s uključenim faktorom oblika uz ograničenje čvrstoće

Materijal	ϕ_B^f	$M_{02} = \frac{\sigma_f^{\frac{2}{3}}}{\rho \cdot C_m}$	$M_2 = \frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^{\frac{2}{3}}}{\rho \cdot C_m}$
Softwood: pine, along grain	1,4	0,0243	0,0304
Bamboo	2	0,0091	0,0144
Low carbon steel	4	0,0098	0,0248

Dobiveni rezultati prikazani su i u dijagramu svojstava materijala (slika 6.19) koji na osi apscisa ima relativnu cijenu po jedinici volumena $\frac{\rho \cdot C_m^*}{(\rho \cdot C_m)_c}$, dok je os ordinata modul elastičnosti materijala E . U bazu podataka su dodani novi zapisi (records) s „ekvivalentnim materijalima“, a kako bi se mogao vizualizirati porast učinkovitosti oblikovanjem presjeka u dijagramu svojstava materijala. Postupak dodavanja novih zapisa prikazan je na slici 6.18. Podaci za „ekvivalentne materijale“ su preuzeti iz tablice 6.13 i tablice 6.15. Na slici 6.19 prikazan je dijagram svojstava materijala „ $E - C_{v,R}$ “ u kojem su prikazani zadani i ekvivalentni materijali međusobno povezani crvenim crtkanim linijama sa strelicama. Plavom punom linijom prikazana je smjernica za izbor materijala nagiba „2“, prema indeksu materijala u izrazu (8). Za uočiti je da sve crtkane crvene linije imaju manji nagib od smjernice te da se zadani materijali nalaze u području manje učinkovitosti od ekvivalentnih materijala (oblikovanog poprečnog presjeka). Najviše je položena crvena crtkana linija koja odgovara nisko ugljičnom čeliku iz razloga jer ovaj materijal ima najveći faktor oblika.

Tablica 6.15 Vrijednosti ekvivalentnih svojstava materijala za ograničenje čvrstoće

Materijal	R_p MPa	ρ kg/m ³	C_m €/kg	ϕ_B^f	R_p^* MPa	C_m^* €/kg
Softwood: pine, along grain	40	520	0.83	1.4	20.41	0.0020
Bamboo	40	700	1.5	2	10.00	0.0150
Low carbon steel	305	7810	0.68	4	19.06	0.0019
Materijal	$\rho \cdot C_m$	$\rho \cdot C_m^*$	$C_{v,R} = \frac{\rho \cdot C_m}{(\rho \cdot C_m)_{\check{c}}}$		$C_{v,R}^* = \frac{\rho \cdot C_m^*}{(\rho \cdot C_m)_{\check{c}}}$	
Softwood: pine, along grain	431.6	1.036	0.084		0.00020	
Bamboo	1050	10.500	0.204		0.00204	
Low carbon steel	5310.8	14.615	1.033		0.00284	

Slika 6.20 Dijagram svojstava materijala „ $R_p - C_{v,R}$ “

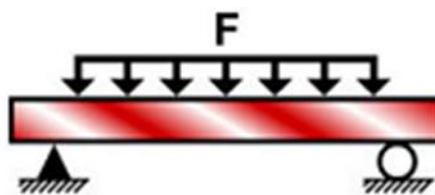
6.1.5 Zadatak 5 – Laka greda specificirane čvrstoće

Zadatak

Primjenom metode „četiri dijagrama” izabrati najbolji iz dostupne baze podataka (u programu Granta EduPack) za laku gredu limitiranu čvrstoćom $\sigma < \sigma_f$.

Duljina grede je $L = 10$ m, a ukupno opterećenje od $F = 10$ kN kontinuirano je raspoređeno duž grede. Greda je oslonjena prema slici 6.21!

Slobodne veličine za izbor su materijali i oblici raspoloživi za izradu grede u bazi podataka.



Slika 6.21 Oslonjena i opterećena greda

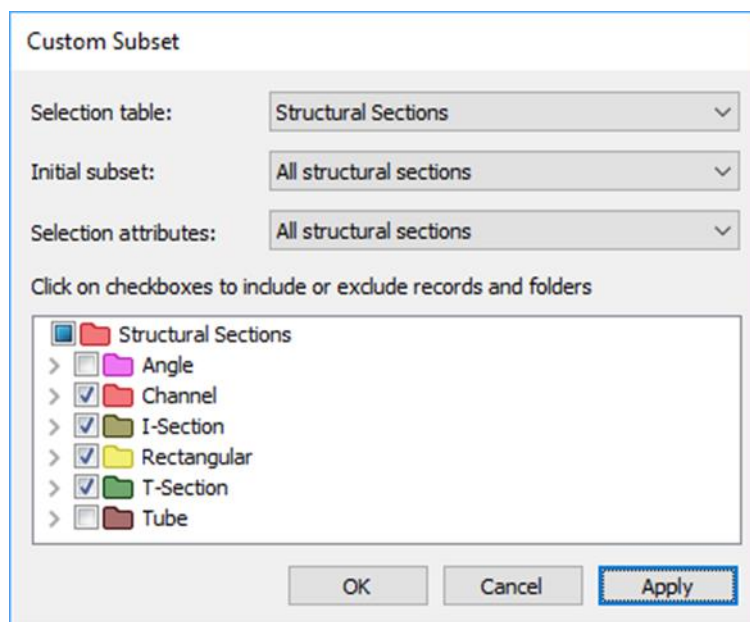
Rješenje

Zahtjevi dizajna prikazani su u tablici 6.16.

Tablica 6.16 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor podne grede

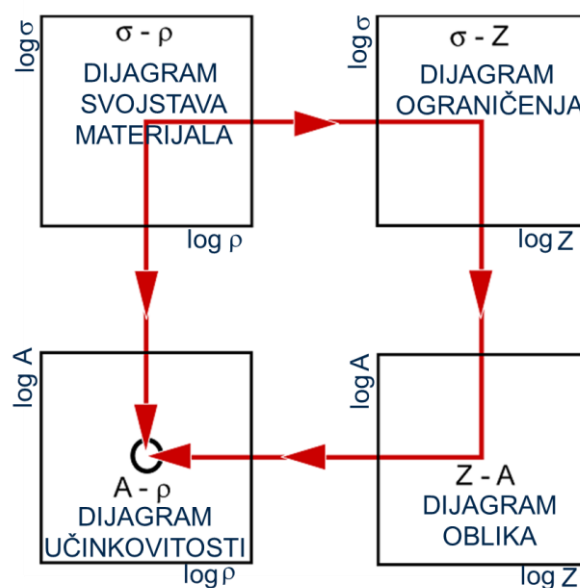
Zahtjevi dizajna za podne grede	
FUNKCIJA	Jeftina podna greda
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina grede $L = 10$ m - Opterećenje $F = 10$ kN Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Čvrstoća σ_f – ne smije doći do trajne deformacije ili loma pod opterećenjem
CILJ	- Minimalna masa grede m
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Izbor oblika Izbor površine presjeka grede A

Prvi korak je izbor dijela baze podataka s konstrukcijskim oblicima. Iz izbornika „*Select from:*” bira se „*Define your own subset*”. Unutar prozora „*Custom subset*” iz izbornika „*Select table:*” odabrati bazu podataka „*Structural Sections*”. U donjem prozoru odabiru se oblici primjereni za izradu greda („*Channel*”, „*I-Section*”, „*Rectangular*” i „*T-Section*”). Izbor dijela baze s konstrukcijskim oblicima prikazan je na slici 6.22.



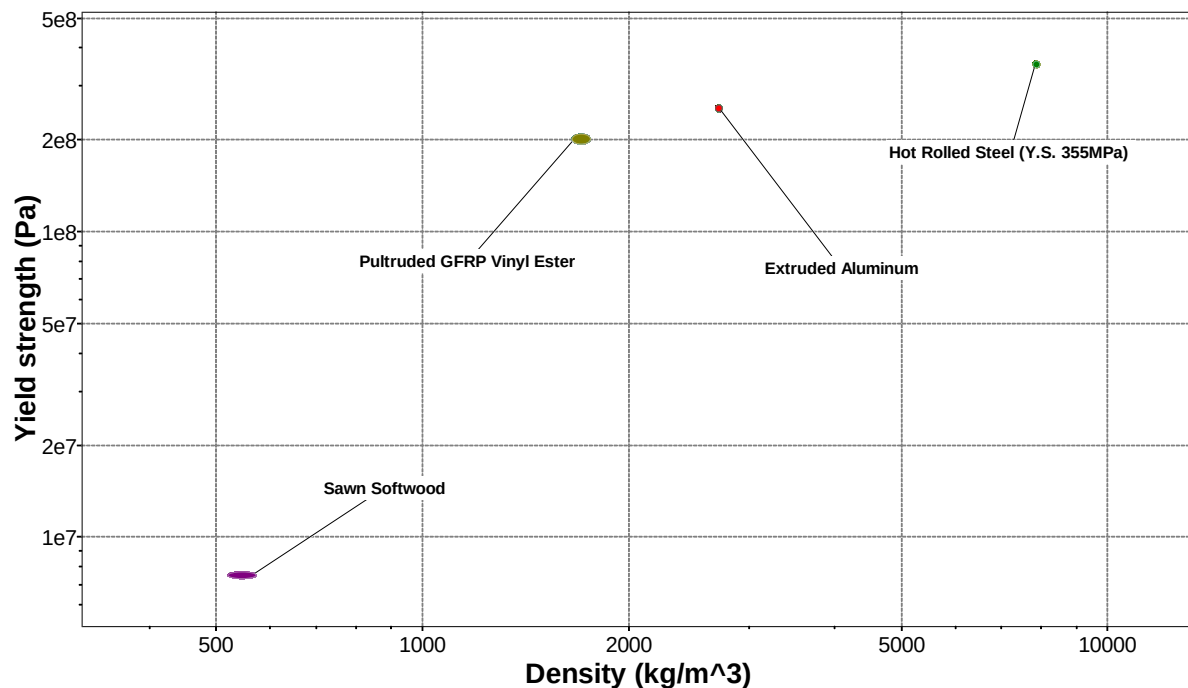
Slika 6.22 Izbor konstrukcijskih oblika za izradu grede

Kako bi se izvršila pretraživanje najbolje kombinacije materijala i oblika za lake grede ograničene čvrstoćom koristi se „metoda četiri dijagrama” shematski prikazana na slici 6.23.



Slika 6.23 Primjena metode četiri dijagrama uz ograničenje krutosti materijala

Najprije se generira odgovarajući dijagram svojstava materijala (prvi kvadrant na slici 6.23) za slučaj ograničenja elastične stabilnosti „ $R_p - \rho$ “ – slika 6.24.



Slika 6.24 Dijagram svojstava materijala „ $R_p - \rho$ “

Do oštećenja grede dolazi u slučaju kada je ukupno kontinuirano opterećenje veće od (prema priručniku s korisnim rješenjima):

$$F_f = 8 \cdot Z \cdot \frac{\sigma_f}{L} \quad (1)$$

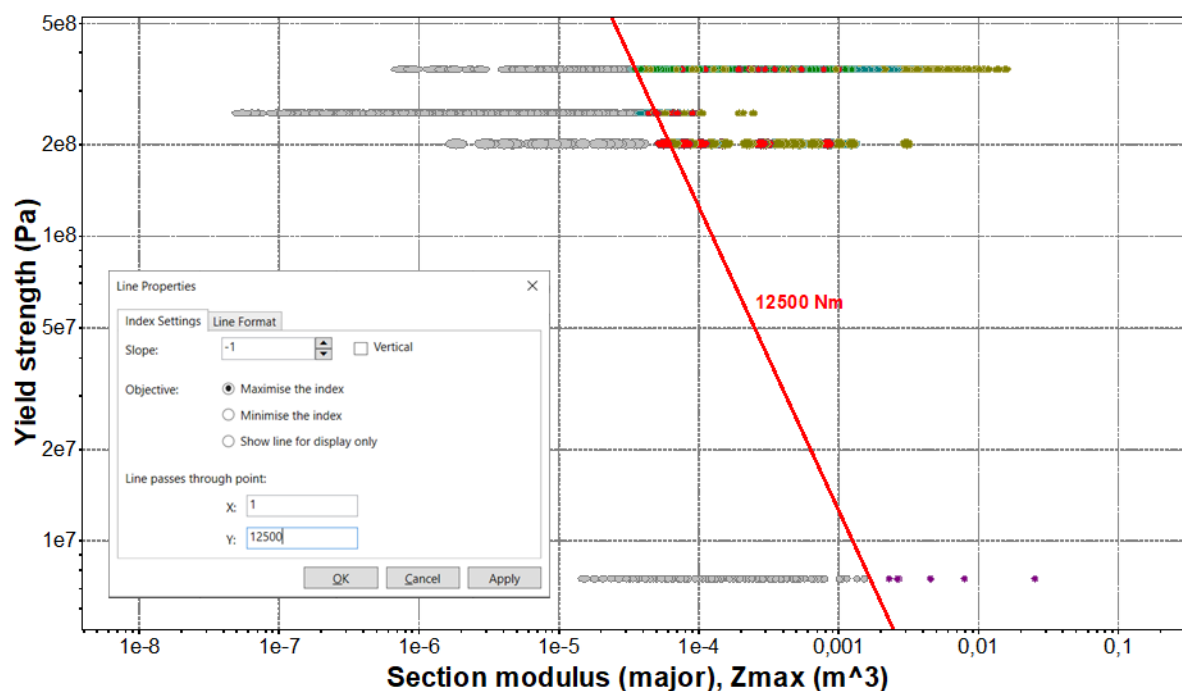
Iz izraza (1) se može odrediti maksimalni moment pri kojem dolazi do oštećenja (što je ujedno i podatak za definiranje ograničenja čvrstoće u dijagramu na slici 6.25:

$$\sigma_f \cdot Z = M_{y,max} = \frac{F_f \cdot L}{8} = \frac{10000 \cdot 10}{8} = 12500 \text{ Nm} \quad (2)$$

Logaritmiranjem i sređivanjem izraza (2) dobije se jednadžba pravca koji se kao ograničenje unosi u dijagram na slici 6.25:

$$\log \sigma_f = -1 \cdot \log Z + \log 12500 \quad (3)$$

gdje je „-1“ nagib pravca ograničenja, a „12500 Nm“ jest vrijednost indeksa koja definira položaj pravca u dijagramu. U donjem lijevom kutu slike 6.25 prikazan je i prozor za definiranje ograničenja u kojem je odabran nagib („Slope“) jednak „-1“, cilj maksimalizacije indeksa („Maximize the index“) jer nosivost grede ne smije biti manja od 12500 Nm, te konačno točka kroz koju prolazi pravac $x=1, y=12500$. Ovdje svakako treba napomenuti da je korišten SI sustav jedinica obzirom da je brojčana vrijednost ograničenja izražena u SI jedinicama.



Slika 6.25 Dijagram ograničenja čvrstoće

Na slici 6.26 prikazan je dijagram učinkovitosti oblika. Nagib linija konstantnih vrijednosti faktora oblika ϕ_B^f dobiju se izvodom izraza za faktor oblika za čvrstoću pri savijanju:

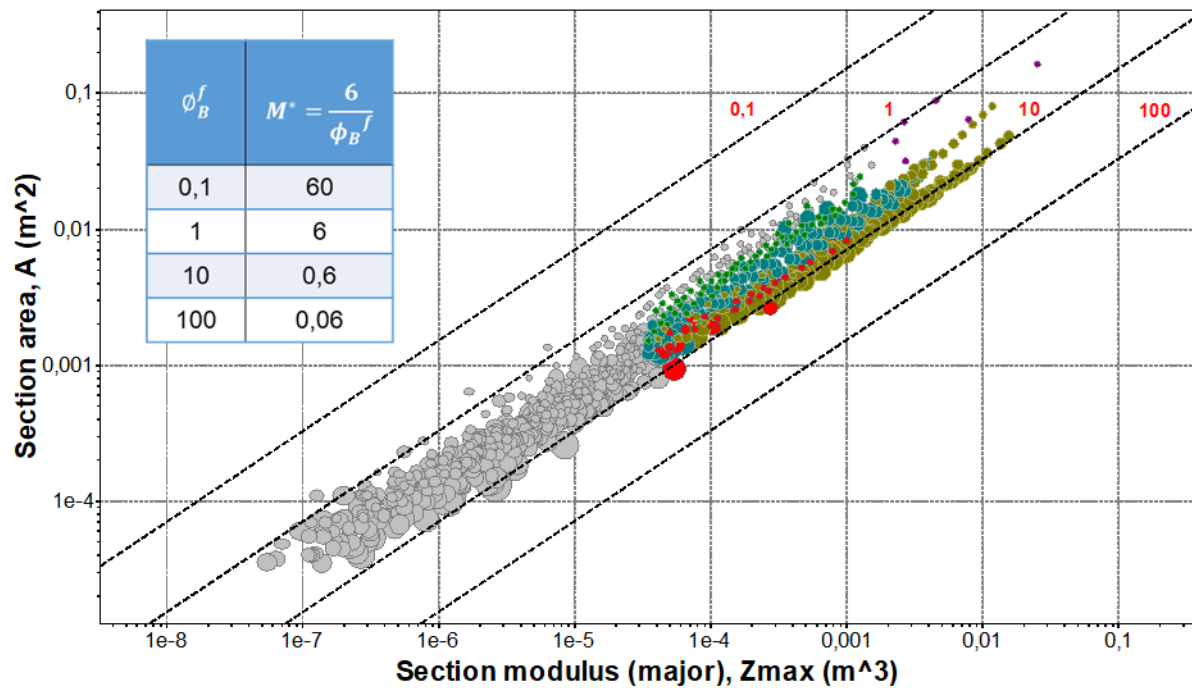
$$\phi_B^f = \frac{6 \cdot Z}{A^{3/2}} \quad (4)$$

Logaritmiranjem i sređivanjem izraza (4) dobije se jednadžba pravca konstantnih vrijednosti faktora oblika ϕ_B^f koje se ucrtavaju u dijagram učinkovitosti oblika za neke karakteristične vrijednosti (na slici 6.26 ucrtani su pravci za vrijednosti „0,1“, „1“, „10“ i „100“).

$$\log A = \frac{2}{3} \log Z + \frac{2}{3} \log \left(\frac{6}{\phi_B^f} \right) \quad (5)$$

gdje je „ $\frac{2}{3}$ “ nagib pravca konstantnih vrijednosti faktora oblika, a „ $\frac{6}{\phi_B^f}$ “ jest vrijednost indeksa koja definira položaj pravca u dijagramu. Brojčane vrijednosti indeksa za 4 ucrtana pravca za vrijednosti faktora oblika ϕ_B^f „0,1“, „1“, „10“ i „100“ izračunate su i prikazane u tablici u gornjem lijevom kutu slike 6.26.

Materijali prikazani u vidu sivih kružića su oni koji ne zadovoljavaju ograničenje nosivosti uneseno u dijagramu na slici 6.25.



Slika 6.26 Dijagram učinkovitosti oblika

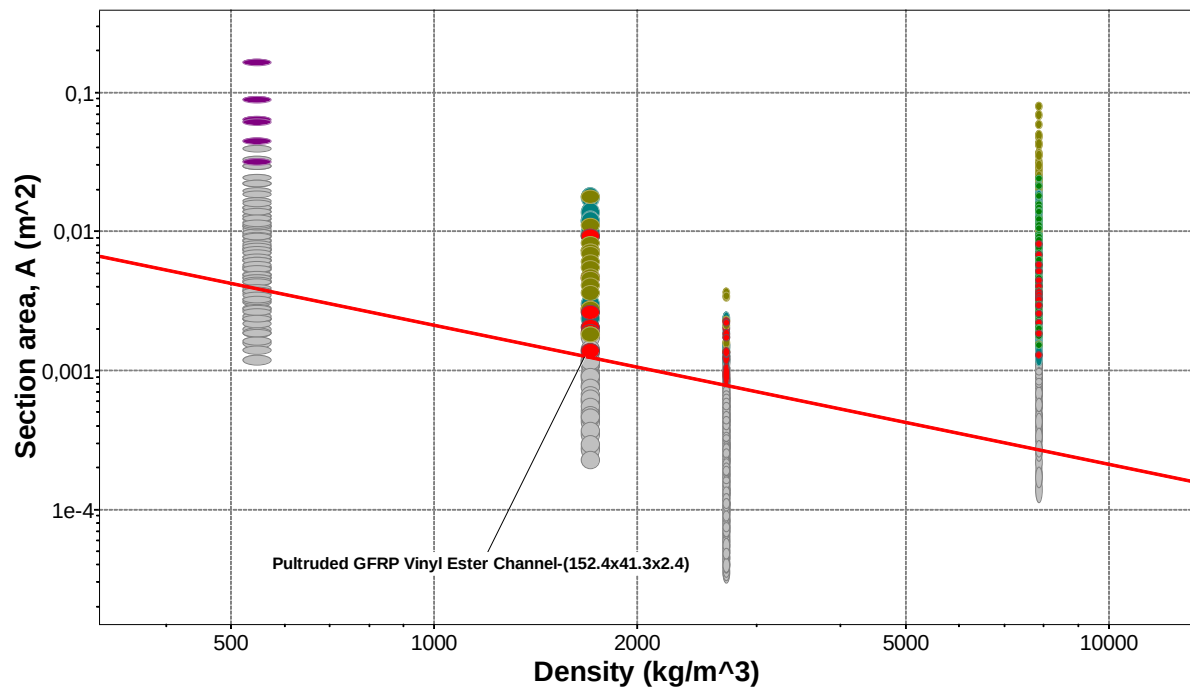
Na slici 6.27 prikazan je dijagram učinkovitosti materijala i oblika za cilj minimalizacije mase. Nagib linije konstantne vrijednosti mase po jedinici duljine $\frac{m}{l}$ dobije se izvedom izraza za funkciju cilja:

$$m = A \cdot l \cdot \rho \quad (6)$$

Logaritmiranjem i sređivanjem izraza (6) dobije se jednadžba pravca konstantnih vrijednosti specifične mase $\frac{m}{l}$ u dijagramu učinkovitosti materijala i oblika za cilj minimalizacije mase:

$$\log A = -1 \cdot \log \rho + \log \frac{m}{l} \quad (7)$$

U izrazu (7) vrijednost „-1“ predstavlja nagib pravca konstantne vrijednosti specifične mase $\frac{m}{l}$ u dijagramu učinkovitosti materijala i oblika. Značenje indeksa koji se može očitati za vrijeme paralelne translacije pravca unutar dijagrama jest specifična masa po jedinici duljine u kg/m. Ovaj pravac treba translirati u smjeru minimalizacije mase tj. prema lijevom donjem kutu dijagrama i to dok se ne izolira jedan ili manja grupa najučinkovitijih kombinacija materijal/oblik. U ovo slučaju najučinkovitiju kombinaciju materijal/oblik daje „Pultruded GFRP Vinyl Ester Channel-(152.4x41.3x2.4)“. Detaljni podaci o izabranom profilu mogu se vidjeti dvostrukim klikom na sami naziv. Radi se o „U“ profilu specifične mase 2.12-2.69 kg/m i specifične cijene 6.2 – 9.9 €/m. Faktor oblika ovog profila je približno $\phi_B^f = 6,7$.



Slika 6.27 Dijagram učinkovitosti materijala i oblika za cilj minimalizacije mase

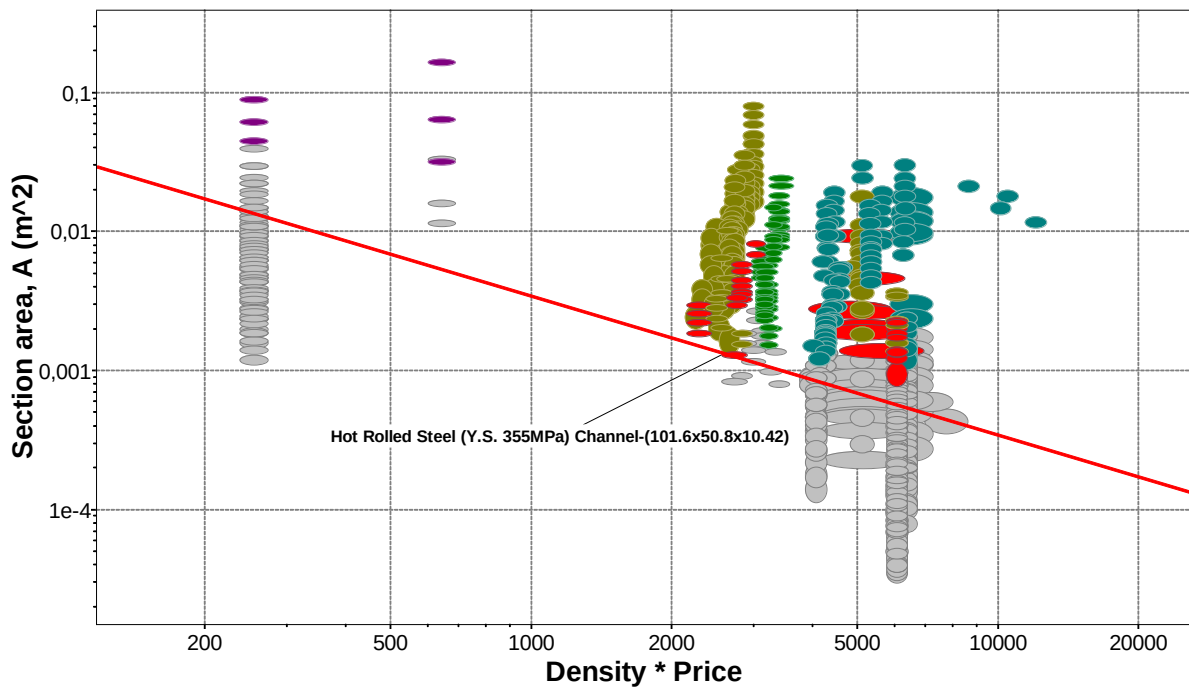
Ukoliko bi željeli odabrati najjeftiniju kombinaciju materijala i oblika onda bi trebalo generirati dijagram učinkovitosti materijala i oblika u kojem je os apscisa cijena po jedinici volumena (slika 6.28). Izvod za nagib linije konstantne vrijednosti cijene po jedinici duljine $\frac{C}{l}$ dobije se izvodom izraza za funkciju cilja:

$$C = A \cdot l \cdot \rho \cdot C_m \quad (8)$$

Logaritmiranjem i sređivanjem izraza (6) dobije se jednadžba pravca konstantnih vrijednosti specifične mase $\frac{m}{l}$ u dijagramu učinkovitosti materijala i oblika za cilj minimalizacije mase:

$$\log A = -1 \cdot \log(\rho \cdot C_m) + \log \frac{C}{l}$$

U izrazu (9) vrijednost „-1“ predstavlja nagib pravca konstantne vrijednosti specifične cijene $\frac{C}{l}$ u dijagramu učinkovitosti materijala i oblika za minimalizaciju troška. Značenje indeksa koji se može očitati za vrijeme paralelne translacije pravca unutar dijagrama jest specifični trošak po jedinici duljine u €/m. Ovaj pravac treba translirati u smjeru minimalizacije troška tj. prema lijevom donjem kutu dijagrama i to dok se ne izolira jedan ili manja grupa najučinkovitijih kombinacija materijal/oblik. U ovo slučaju najučinkovitiju kombinaciju materijal/oblik daje „Hot Rolled Steel (Y.S. 355MPa) Channel-(101.6x50.8x10.42)“. Radi se o „U“ profilu specifične mase 10 – 10.4 kg/m i cijene 3.3 – 3.8 €/m. Faktor oblika ovog profila je približno $\phi_B^f = 5,2$.

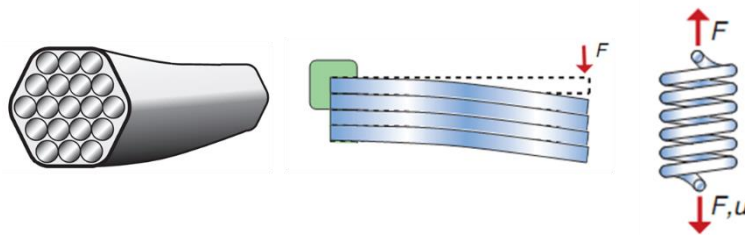


Slika 6.28 Dijagram učinkovitosti materijala i oblika za cilj minimalizacije cijena

6.1.6 Zadatak 6 – Oblici koji se lako savijaju

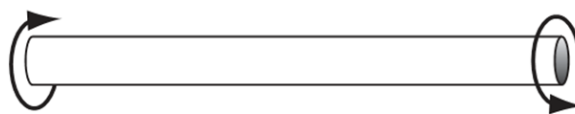
Uvod

Strukturna efikasnost fleksibilnih sajli, lisnatih i zavojnih opruga (slika 6.29) mora biti niska. Zahtjev dizajna je niska savojna ili torzijska krutost u smjeru jedne ili dvije osi, dok krutost u ostalim smjerovima mora biti visoka.



Slika 6.29 Fleksibilna sjala (lijevo), lisnata opruga (sredina) i zavojna opruga (desno)

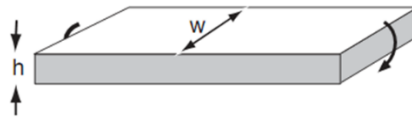
Primjer torzijske opruge s faktorom oblika $\phi_T^e \approx 1$ jest vratilo punog kružnog presjeka prikazanog na slici 6.30.



Slika 6.30 Torzijska opruga

Jedna lamela lisnate opruge ($h \ll w$), na slici 6.31, omogućava znatno niži faktor oblika:

$$\phi_T^e \approx \frac{h}{w}.$$

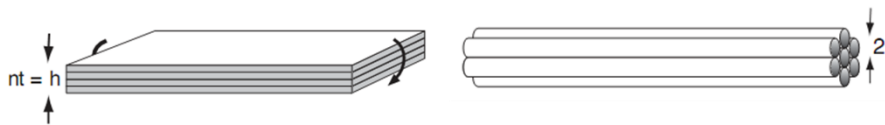


Slika 6.31 Lamela lisnate opruga

Zadatak

Odrediti izraz za faktor oblika kod elastičnog savijanja ϕ_B^e :

- višenitnih sajli
- lisnatih opruga (slika 6.32)!



Slika 6.32 Lisnata opruga (lijevo) i višenitna sjajla (desno)

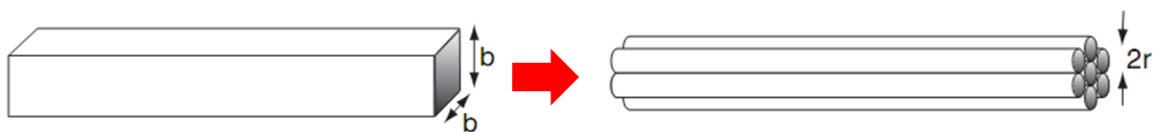
Rješenje

a) Faktor oblika višenitnih sajli

Promatra se promjena učinkovitosti kada se puni kvadratni profil površine $A_0 = b^2$ podjeli na n cilindričnih niti, svaka radijusa r ukupne površine $n \cdot A = A_0$ (slika 6.33):

$$A_0 = n \cdot A \quad (1)$$

$$b^2 = n \cdot \pi \cdot r^2 \quad (2)$$



Slika 6.33 Transformacija referentnog presjeka u višenitnu sjajlu

Krutost referentne grede punog kvadratnog oblika S_0 :

$$S_0 = \frac{C_1 \cdot E \cdot I_0}{L^3} \quad (3)$$

Gdje je aksijalni moment inercije referentnog presjeka:

$$I_0 = \frac{b^4}{12} \quad (4)$$

Uvrštavanjem izraza (4) u izraz (3):

$$S_0 = \frac{c_1 \cdot E \cdot b^4}{12 \cdot L^3} \quad (5)$$

Krutost S sajle s n niti radijusa r iste površine je:

$$S = n \cdot \frac{c_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (6)$$

Aksijalni moment inercije za okrugli poprečni presjek je:

$$I = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad (7)$$

Iz uvjeta da su referentni poprečni presjek i poprečni presjek sajle jednaki $A=A_0$:

$$n \cdot \pi \cdot r^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{b^2}{n \cdot \pi} \quad (8)$$

Uvrštavanjem izraza (8) u izraz (7):

$$I = \frac{\pi \cdot b^4}{4 \cdot n^2 \cdot \pi^2} \quad (9)$$

Uvrštavanjem izraza (9) u izraz (6):

$$S = \frac{c_1 \cdot E \cdot b^4}{4 \cdot n \cdot \pi \cdot L^3} \quad (10)$$

Faktor oblika za elastično savijanje za višenitnu sajlu je:

$$\phi_B^e = \frac{S}{S_0} \quad (11)$$

Uvrštavanjem izraza (5) i (10) u izraz (11):

$$\phi_B^e = \frac{S}{S_0} = \frac{3}{n \cdot \pi} \quad (12)$$

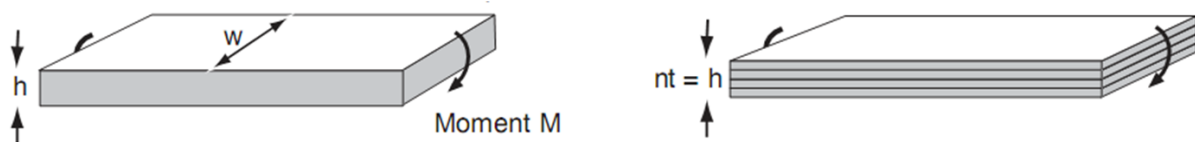
Kako se iz izraza (12) vidi krutost višenitne sajle je obrnuto razmjerna broju niti.

b) Faktor oblika lisnate opruge

Ako se razmotri promjena učinkovitosti kada se lisnata opruga punog pravokutnog profila površine $A_0 = b \cdot h$ debljine h podjeli na n lamela, svaka debljine $t = \frac{h}{n}$:

$$A_0 = A$$

$$h \cdot w = n \cdot t \cdot w \quad (13)$$



Slika 6.34 Transformacija referentnog presjeka u lisnatu oprugu

Krutost referentne ploče punog pravokutnog oblika presjeka (slika 6.34-lijevo) S_0 :

$$S_0 = \frac{C_1 \cdot E \cdot I_0}{L^3} \quad (14)$$

Gdje je aksijalni moment inercije pravokutnog presjeka:

$$I_0 = \frac{w \cdot h^3}{12} \quad (15)$$

Uvrštavanjem izraza (15) u izraz (14):

$$S_0 = \frac{C_1 \cdot E \cdot w \cdot h^3}{12 \cdot L^3} \quad (16)$$

Krutost S lisnate opruge sa n lamela iste površine je:

$$S = n \cdot \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (17)$$

Aksijalni moment inercije za pravokutni poprečni presjek lamele je:

$$I = \frac{w \cdot t^3}{12} \quad (18)$$

Iz uvjeta da su referentni poprečni presjek i poprečni presjeci svih lamela jednaki $A=A_0$:

$$n \cdot w \cdot t = h \cdot w \quad \Rightarrow \quad t = \frac{h}{n} \quad (19)$$

Uvrštavanjem izraza (19) u izraz (18):

$$I = \frac{w \cdot h^3}{12 \cdot n^3} \quad (20)$$

Uvrštavanjem izraza (20) u izraz (17):

$$S = \frac{C_1 \cdot E \cdot w \cdot h^3}{12 \cdot n^2 \cdot L^3} \quad (21)$$

Faktor oblika za elastično savijanje za lisnatu oprugu s n lamela je:

$$\phi_B^e = \frac{S}{S_0} \quad (22)$$

Uvrštavanjem izraza (16) i (21) u izraz (22):

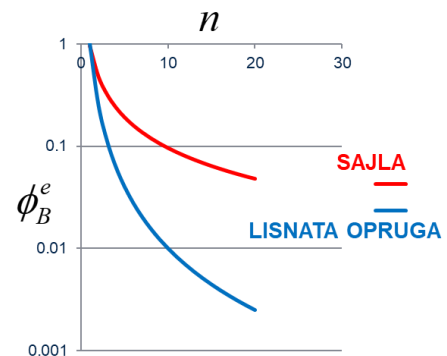
$$\phi_B^e = \frac{S}{S_0} = \frac{1}{n^2} \quad (23)$$

Može se zaključiti da je krutost lisnate opruge obrnuto proporcionalna kvadratu broja lamela što se vidi iz izraza (23).

Ako se usporede izrazi za faktor oblika za sajle i lisnate opruge može se uočiti znatno brže opadanje faktora oblika kod višeslojnih lisnatih opruga ().

Faktor oblika sajle sa n niti: $(\phi_B^e)_S = \frac{S}{S_0} = \frac{3}{n \cdot \pi}$

Faktor oblika lisnate opruge sa n lamela: $(\phi_B^e)_O = \frac{S}{S_0} = \frac{1}{n^2}$



6.1.7 Zadatak 7 – Opruge visoke učinkovitosti

Uvod

Najučinkovitiji materijal za oprugu jest onaj koji ima najveći omjer pohranjene energije prema jediničnoj masi ili prema jediničnom volumenu. U prethodnim poglavljima izbor materijala se odnosio na jednake oblike presjeka opruga tj. faktor oblika je imao istu vrijednost bez obzira na materijal. U ovom primjeru će biti uključen i utjecaj oblika na izbor materijala.

Zadatak

Odrediti indekse materijala učinkovite opruge i to za slučaj:

- Maksimalne pohranjene energije po jedinici volumena
- Maksimalne pohranjene energije po jedinici mase
- Maksimalne pohranjene energije po jedinici troška

Potrebno je između ponuđenih odrediti najučinkovitiju oprugu po jedinici volumena, mase te po jediničnoj cijeni. Ponuđeni materijali i oblici opruga su prikazani u tablici 6.17.

Tablica 6.17 Svojstva materijala za izradu opruga

Materijal	R_p MPa	E GPa	ρ kg/m ³	C_m €/kg	Oblik	Dimenzije
Čelik AISI 1095	1000	210	7850	0,77		$b/h=1$
CFRP	43	8,5	1560	42		$b/h=2$ $t/h=0,04$
CuBe2CoNi Očvrsnuta dozrijev.	1200	135	8250	17		$b/h=2$ $h, b \gg t$
Cu-Ni legura Monel 400	1040	180	8820	26		$a/b=0,5$
Titan β legura Ti-13V-11Cr-3Al	1160	110	4800	58		$b/h=0,5$ $t/h=0,04$

Rješenje

Zahtjevi dizajna učinkovite opruge sažeti su u tablici 6.18:

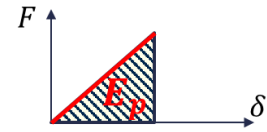
Tablica 6.18 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor opruge

Zahtjevi dizajna za opruge	
FUNKCIJA	Elastična opruga (savijanje / torzija)
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina savojne opruge L - Opterećenje opruge F Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Čvrstoća σ_f – ne smije doći do loma opruge
CILJ	Maksimalno pohranjena elastična energija po: - jediničnom volumenu - jediničnoj masi - jediničnoj cijeni
SLOBODNE VARIABLE	Izbor materijala Izbor oblika

a) Elastična energija savojne opruge

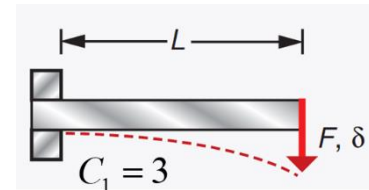
Elastična energija E_p sadržana u opruzi je:

$$E_p = \frac{F \cdot \delta}{2} \quad (1)$$



Ako je opruga konzolno opterećena greda tada je progib kraja opruge:

$$\delta = \frac{F \cdot L^3}{C_1 \cdot E \cdot I} \quad (2)$$



Eliminacijom progiba δ iz izraza (1) i (2):

$$E_p = \frac{F^2 \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I} \quad (3)$$

Zamjenom momenta inercije s izrazom za faktor oblika za elastično savijanje grede:

$$\phi_B^e = \frac{S}{S_0} = \frac{12 \cdot I}{A^2} \Rightarrow E_p = \frac{2 \cdot F^2 \cdot L^3}{\phi_B^e \cdot A^2 \cdot E} \quad (4)$$

Ograničenje dizajna je da ne smije doći do loma opruge:

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{F \cdot L}{Z} \leq \sigma_f \quad (5)$$

Iz izraza (5) zamjenom momenta otpora površine s izrazom za faktor oblika:

$$\phi_B^f = \frac{Z}{Z_0} = \frac{6 \cdot Z}{A^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \sigma = \frac{6 \cdot F \cdot L}{\phi_B^f \cdot A^{\frac{3}{2}}} \leq \sigma_f \quad (6)$$

Eliminacijom opterećenja F iz izraza (4) i (6):

$$E_p = \frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^2 \cdot L \cdot A}{18 \cdot \phi_B^e \cdot E} \Rightarrow \frac{E_p}{V} = \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_B^e \cdot E} \right) \quad (7)$$

Najučinkovitiji materijal i oblik za savojno opterećenu elastičnu oprugu po jedinici volumena će biti onaj čiji je indeks materijala i oblika najveći:

$$M_{V1} = \frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_B^e \cdot E} \quad (8)$$

Dijeljenjem izraza (8) s gustoćom ρ dobije se indeks za maksimalnu energiju opruge po jedinici mase:

$$M_{M1} = \frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_B^e \cdot E \cdot \rho} \quad (9)$$

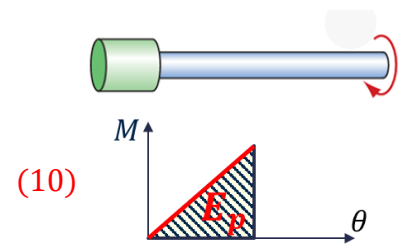
Dijeljenjem izraza (8) s gustoćom i cijenom materijala po kilogramu $\rho \cdot C_m$ dobije se indeks maksimalne energije po jedinici cijene:

$$M_{C1} = \frac{(\phi_B^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_B^e \cdot E \cdot \rho \cdot C_m} \quad (9)$$

b) Elastična energija torzijske opruge

Elastična energija E_p u opruzi je:

$$E_p = \frac{M \cdot \theta}{2}$$



Kut zakretanja za torzijsku oprugu je:

$$\theta = \frac{M \cdot L}{G \cdot K_p} \quad (11)$$

gdje je: - $G = \frac{3 \times E}{8}$ modul smicanja
- K_p – polarni moment otpora presjeka

Eliminacijom θ iz 2.1 i 2.2 slijedi:

$$E_p = \frac{M^2 \cdot L}{2 \cdot G \cdot K_p} \quad (12)$$

Zamjenom polarnog momenta tromosti s izrazom za faktor oblika za elastično uvijanje:

$$\phi_T^e = \frac{K_p}{K_{p0}} = 7.14 \cdot \frac{K_p}{A^2} \Rightarrow E_p = \frac{3.57 \cdot M^2 \cdot L}{\phi_T^e \cdot A^2 \cdot G} \quad (13)$$

Ograničenje dizajna je da ne smije doći do loma opruge:

$$\tau_{max} = \frac{M}{Q} \leq \sigma_f \quad (14)$$

Izraz faktora oblika za lom kod torzije:

$$\phi_T^f = \frac{Q}{Q_0} = \frac{4.8 \cdot Q}{A^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

gdje $Q = I_p/r_m$ kod torzije ima istu ulogu kao i moment otpora površine W kod savijanja.

Izraz u funkciji polarnog momenta otpora oblikovanog presjeka:

$$Q = \frac{\phi_T^f \cdot A^{\frac{3}{2}}}{4.8} \quad (16)$$

Iz izraza (14) i izraza (16) izvršena je zamjena eliminacijom polarnog momenta otpora površine sa izrazom za faktor oblika:

$$\tau_{max} = \frac{4.8 \cdot M}{\phi_T^f \cdot A^{\frac{3}{2}}} \leq \sigma_f \quad (17)$$

Eliminacijom opterećenja M iz izraza (13) i (17):

$$E_p = \frac{3.57}{4.8^2} \cdot A \cdot L \cdot \frac{(\phi_T^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_T^e \cdot G} = \frac{3.57}{4.8^2} \cdot V \cdot \frac{(\phi_T^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_T^e \cdot G} \quad (18)$$

Ako se uvrsti $G = \frac{3 \times E}{8}$ uvrsti u izraz (18) dobije se izraz za maksimalno akumuliranu energiju po jedinici volumena:

$$\frac{E_p}{V} = 0,414 \cdot \frac{(\phi_T^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_T^e \cdot E} \quad (19)$$

Indeks materijala i oblika za maksimalnu energiju po jedinici volumena je:

$$M_{V2} = \frac{(\phi_T^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_T^e \cdot E} \quad (20)$$

Dijeljenjem izraza (20) s gustoćom ρ dobije se indeks za maksimalnu energiju po jedinici mase:

$$M_{M2} = \frac{(\phi_T^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_T^e \cdot E \cdot \rho} \quad (21)$$

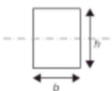
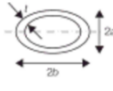
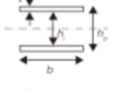
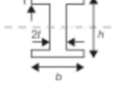
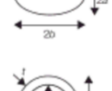
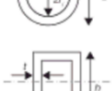
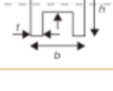
Dijeljenjem izraza (21) s gustoćom i cijenom materijala po kilogramu $\rho \cdot C_m$ dobije se indeks maksimalne energije po jedinici troška:

$$M_{CM2} = \frac{(\phi_T^f \cdot \sigma_f)^2}{\phi_T^e \cdot E \cdot \rho \cdot C_m} \quad (22)$$

Faktori oblika za zadane presjeke prikazani su u tablici 6.19. U tablici 6.20 su dane vrijednosti indeksa materijala za savojne opruge, a u tablici 6.21 vrijednosti indeksa materijala za torzijske opruge. Kada su u pitanju jeftine opruge očito je najbolji materijal čelik AISI 1095 i za savojne

i za torzijske opruge. Ako se traže lagane opruge najbolji materijal je legura titana Ti-13V-11Cr-3Al.

Tablica 6.19 Faktori oblika učinkovitih opruga

Table 10.10 Shape Factors for the Efficiency of Springs			Table 10.10 Shape Factors for the Efficiency of Springs continued		
Section Shape	$(\phi_B^f)^2 / \phi_B^e$	$(\phi_T^f)^2 / \phi_T^e$	Section Shape	$(\phi_B^f)^2 / \phi_B^e$	$(\phi_T^f)^2 / \phi_T^e$
	1	$1.08 \frac{b^2}{h^2} \frac{1}{(1 + 0.6 \frac{b}{h})^2 (1 - 0.58 \frac{b}{h})}$		$\frac{3}{4} \frac{(1 + 3b/a)}{(1 + b/a)} (a, b \gg t)$	$3.2 \frac{(1 + a^2/b^2)}{(1 + a/b)} (\frac{b}{a})^{3/2} (a, b \gg t)$
	0.38	0.83		3	—
	0.75	1.6		$\frac{(1 + 3b/h)}{(1 + b/h)} (h, b \gg t)$	$1.07 \frac{(1 + 4h/b)}{(1 + h/b)} (h, b \gg t)$
	0.75	$0.8 (1 + \frac{a^2}{b^2}) (a < b)$		$1.13 \frac{(1 + 4bt^2/h^2)}{(1 + b/h)} (h \gg t)$	$0.54 \frac{(1 + 8b/h)}{(1 + h/b)} (h, b \gg t)$
	1.5	3.2		$1.13 \frac{(1 + 4bt^2/h^2)}{(1 + b/h)} (h \gg t)$	$1.07 \frac{(1 + 4h/b)}{(1 + h/b)} (h, b \gg t)$
	$\frac{(1 + 3b/h)}{(1 + b/h)} (h, b \gg t)$	$3.32 \frac{1}{(1 - t/h)^4} \dots (h, b \gg t)$			

Tablica 6.20 Indeksi materijala za savojne opruge

Materijal	$\frac{(\phi_B^f)^2}{\phi_B^e}$	$\frac{E_p/V}{\text{kJ/m}^3}$	$\frac{E_p/(V \cdot \rho)}{\text{J/kg}}$	$\frac{E_p/(V \cdot \rho \cdot C_m)}{\text{J/€}}$
Čelik AISI 1095	1	265	33	43,7
CFRP	2,33	282	18	0,43
CuBe2CoNi Očvrsnuta dozrijev.	2,33	1380	167	9,85
Cu-Ni legura Monel 400	0,75	250	28	1,09
Titan β legura Ti- 13V-11Cr-3Al	1,66	113	235	4,06

Tablica 6.21 Indeksi materijala za torzijske opruge

Materijal	$\frac{(\phi_T^f)^2}{\phi_T^e}$	$\frac{E_p/V}{\text{MJ/m}^3}$	$\frac{E_p/(V \cdot \rho)}{\text{J/kg}}$	$\frac{E_p/(V \cdot \rho \cdot C_m)}{\text{J/€}}$
Čelik AISI 1095	1	1,98	252	327
CFRP	3,91	3,54	226	5,4
CuBe2CoNi Očvrsnuta dozrijev.	3,21	14,2	1726	101,6
Cu-Ni legura Monel 400	1	2,5	283	10,9
Titan β legura Ti- 13V-11Cr-3Al	3,9	19,9	4144	71,4

6.1.8 Zadatak 8 – Određivanje faktora oblika prema eksperimentalnim podacima

Zadatak

Faktor oblika je mjera doprinosa krutosti oblikovanjem poprečnog presjeka (relativno prema referentnom punom kvadratnom presjeku iste površine). Faktor oblika se može odrediti eksperimentalno.

Masa m grede, duljine L i tražene savojne krutosti S_B s poprečnim presjekom koji ima faktor oblika ϕ_B^e je:

$$m = \left(\frac{12 S_B}{C_1} \right)^{1/2} L^{5/2} \left[\frac{\rho}{(\phi_B^e E)^{1/2}} \right]$$

U gornjem izrazu je C_1 konstanta koja ovisi o raspodjeli opterećenja duž grede i osloncima ($C_1=48$). Odrediti faktor oblika ϕ_B^e koristeći eksperimentalne podatke iz tablice 6.22.

Tablica 6.22 Eksperimentalni podaci

Svojstvo	Veličina
Savojna krutost grede S_B	$7,2 \cdot 10^5 \text{ Nm}$
Masa po jedinici duljine m/L	$\frac{1 \text{ kg}}{\text{m}}$
Duljina grede L	1 m
Materijal	Legura aluminija 6061
Gustoća materijala ρ	$\frac{2670 \text{ kg}}{\text{m}^3}$
Youngov modul elastičnosti E	69 GPa

Rješenje

Faktor oblika za elastično savijanje:

$$\phi_B^e = \frac{S}{S_o} = 12 \frac{I}{A^2} \quad (1)$$

Masa po jedinici duljine:

$$\frac{m}{L} = \frac{A \cdot L \cdot \rho}{L} = A \cdot \rho \quad \rightarrow \quad A = \frac{m/L}{\rho} \quad (2)$$

Savojna krutost grede je:

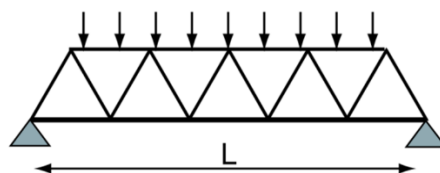
$$S = \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad \rightarrow \quad I = \frac{S \cdot L^3}{C_1 \cdot E} \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (2) i (3) u izraz (1)

$$\phi_B^e = \frac{S}{S_o} = 12 \cdot \frac{I}{A^2} = 12 \cdot \frac{\frac{S \cdot L^3}{C_1 \cdot E}}{\left(\frac{m/L}{\rho}\right)^2} = \frac{S \cdot L^3 \cdot \rho^2}{C_1 \cdot E \cdot (m/L)^2} = \frac{7,2 \cdot 10^5 \cdot 1^3 \cdot 2670^2}{48 \cdot 69 \cdot 10^9 \cdot 1^2} = \mathbf{18,6}$$

6.1.9 Zadatak 9 – Određivanje faktora oblika čelične mosne konstrukcije**Zadatak**

Čelični rešetkasti most prikazan na slici 6.35 ima raspon L i jednostavno je oslonjen na oba kraja. Most teži m tona. U pravilu, mostovi su oblikovani s krutošću S_B tako da je centralni progib mosta δ uslijed vlastite mase manji od $1/300$ raspona mosta L (dakle $S_B \geq 300 \cdot m \cdot \frac{g}{L}$ gdje je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

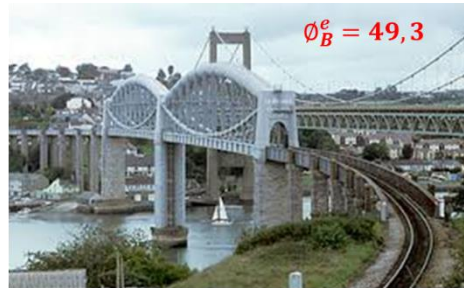


Slika 6.35 Shematski prikaz rešetkaste mosne konstrukcije

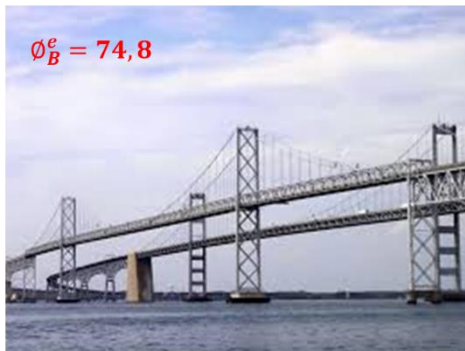
Upotrijebiti podatke za određivanje minimalnog faktora oblika ϕ_B^e za tri čelična rešetkasta mosta (slika 6.36) navedene u tablici 6.23. Gustoća čelika je $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, a modul elastičnosti $E = 205 \text{ GPa}$. Konstanta za jednoliko raspodijeljeno opterećenje iznosi $C_1 = \frac{384}{5} = 76,8$.

Tablica 6.23 Podaci o razmatranim mostovima

Most	Raspon L , m	Masa m , kg
Royal Albert bridge, Tamar, Saltash UK (1857)	139	$1060 \cdot 10^3$
Carquinez Strait bridge, California USA (1927)	132	$650 \cdot 10^3$
Chesapeake Bay bridge, Maryland USA (1952)	146	$850 \cdot 10^3$



Royal Albert bridge, Tamar, Saltash UK (1857)



Chesapeake Bay bridge, Maryland USA (1952)



Carquinez Strait bridge, California USA (1927)

Slika 6.36 Rešetkaste konstrukcije razmatranih mostova

Rješenje

Faktor oblika za elastično savijanje mosne konstrukcije je:

$$\phi_B^e = \frac{S}{S_0} = 12 \frac{I}{A^2} \quad (1)$$

Potrebna krutost je zadana kao dozvoljeni maksimalni progib $\delta_{max} \leq \frac{L}{300}$. Ako se rešetkasta konstrukcija mosta pojednostavljeno promatra kao kontinuirano opterećena greda onda je izraz za maksimalni progib grede:

$$\delta_{max} = \frac{F \cdot L^3}{C_1 \cdot E \cdot I} = \frac{m \cdot g \cdot L^3}{C_1 \cdot E \cdot I} \leq \frac{L}{300} \quad (2)$$

Za kontinuirano opterećenu i jednostavno oslonjenu gredu na krajevima $C_1 = \frac{384}{5}$. Ukupno kontinuirano opterećenje je jednako $F = m \cdot g$.

Iz izraza (2) može se odrediti aksijalni moment inercije konstrukcije:

$$I \geq \frac{300 \cdot m \cdot g \cdot L^2}{\frac{384}{5} \cdot E} = \frac{1500 \cdot m \cdot g \cdot L^2}{384 \cdot E} \quad (3)$$

Površina poprečnog presjeka mosta se može odrediti iz izraza za masu:

$$m = A \cdot L \cdot \rho \rightarrow A = \frac{m}{L \cdot \rho} \quad (4)$$

Konačno uvrštavanjem izraza (3) i (4) u izraz (1) slijedi faktor oblika za elastično savijanje mosne konstrukcije:

$$\phi_B^e = 12 \cdot \frac{I}{A^2} = 12 \cdot \frac{\frac{1500 \cdot m \cdot g \cdot L^2}{384 \cdot E}}{\left(\frac{m}{L \cdot \rho}\right)^2} = \frac{375 \cdot L^4 \cdot g \cdot \rho^2}{8 \cdot E \cdot m} \quad (5)$$

Uvrštavanjem ulaznih podataka iz teksta zadatka i tablice 6.23 dobiju se traženi faktori oblika čije vrijednosti su prikazane u tablici 6.24. Visoke vrijednosti faktora oblika proizlaze iz činjenice da je mosna konstrukcija izrađena strukturiranjem na dvije razine (korišteni su profili oblika cijevi – 1. razina koji čine rešetku – 2. razina).

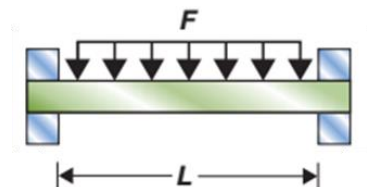
Tablica 6.24 Faktori oblika zadanih mosnih konstrukcija

Most	Faktor ϕ_B^e
Royal Albert bridge, Tamar, Saltash UK (1857)	49.3
Carquinez Strait bridge, California USA (1927)	65.4
Chesapeake Bay bridge, Maryland USA (1952)	74.8

6.1.10 Zadatak 10 – Laka i kruta greda

Zadatak

Primjenom Granta EduPack programa potrebno je odabrati kombinaciju materijal / oblik iz raspoložive baze podataka „I“ profila i pravokutnih profila za izradu jeftine i krute grede učvršćene i opterećene prema slici.



Duljina grede je $L = 4$ m, a opterećenje od $F = 3$ kN je kontinuirano raspoređeno duž grede. Dozvoljeni progib grede je $\delta_{dop} = 50$ mm. Slobodne veličine za izbor su materijali i oblici raspoloživi u bazi podataka („Structural Sections“).

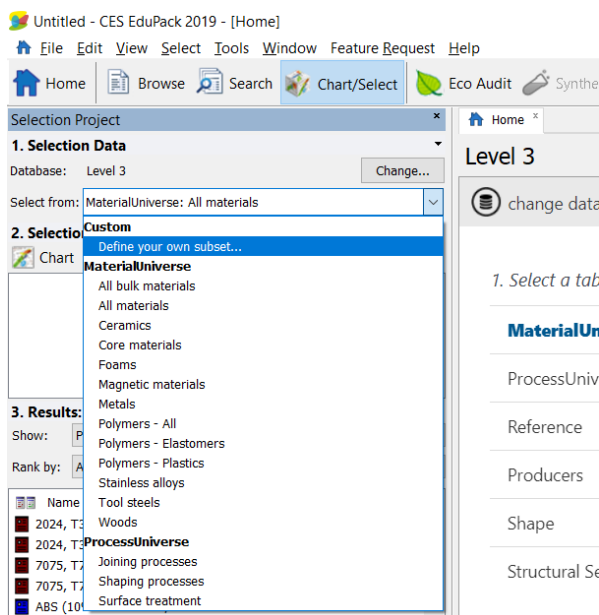
Rješenje

Zahtjevi dizajna za izradu jeftine i krute grede sadržani su u tablici 6.25.

Tablica 6.25 Tablica sa zahtjevima dizajna jeftine i krute grede

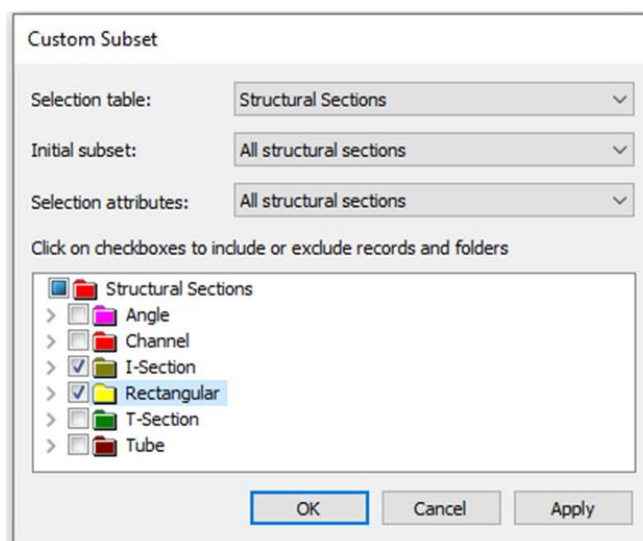
Zahtjevi dizajna za gredu	
FUNKCIJA	Jeftina i kruta greda
OGRANIČENJA	Jednostavna ograničenja - Duljina grede $L = 4$ m - Specificirano opterećenje duž grede $F = 3$ kN - Oblik presjeka I profil ili pravokutni profil Limitirajuća ograničenja - Nema Aktivno ograničenje - Krutost – maksimalni progib grede ne smije biti veći od $\delta_{dop} = 50$ mm
CILJ	- Minimalna masa grede
SLOBODNE VARIJABLE	Izbor materijala Izbor oblika Izbor površine presjeka grede A

Zadatak se rješava primjenom Granta EduPack programa. Prvi korak je izbor baze podataka „Level 3“. Iz alatne trake se bira gumb „Chart/Select“. U otvorenom prozoru najprije se odabire dio baze podataka s konstrukcijskim oblicima presjeka izborom opcije „Define your own subset...“ u okviru polja „Select from“ (slika 6.37). Iz tablice za izbor odabire se baza podataka „Structural Sections“. U donjem prozoru odabiru se traženi oblici (u ovom primjeru „Tube“) – slika 6.37.



Slika 6.37 Izbor dijela baze podataka

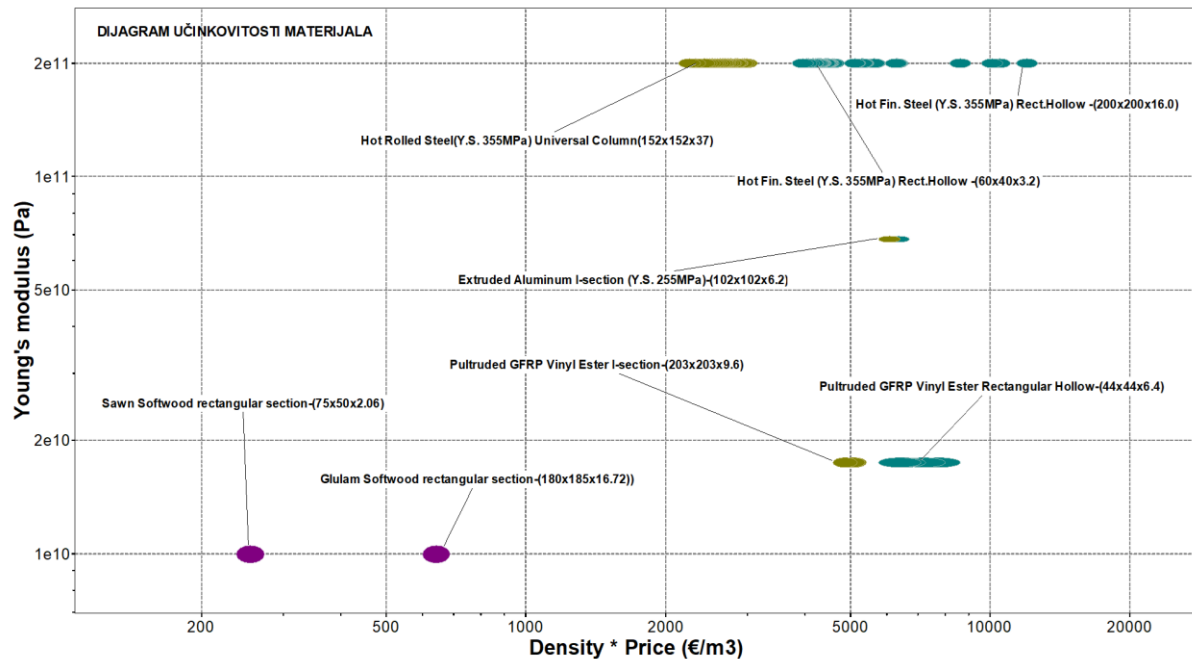
U prozoru „Custom subset“ u izboru „Selection table“ odabrati dio baze podataka „Structural Sections“ (slika 6.10). Obzirom da je u zadatku ograničenje na oblik poprečnog presjeka – kružni vijenac u donjem dijelu prozora označavaju se samo oblici „Tube“. Ostali oblici ostaju neoznačeni.



Slika 6.38 Izbornik „Custom subset – Structural Sections“

Kako bi se izvršila pretraživanje najbolje kombinacije materijala i oblika za vitke nogice stolića koristi se „metoda četiri dijagrama“ shematski prikazana na slici 6.11.

Najprije se generira odgovarajući dijagram svojstava materijala (prvi kvadrant na slici 6.11) za slučaj ograničenja krutosti grede „ $E - \rho \cdot C_m$ “ – slika 6.41.



Slika 6.39 Dijagram svojstava materijala „ $E - \rho \cdot C_m$ “

Drugi dijagram kojeg treba generirati jest dijagram učinkovitosti oblika (treći kvadrant na slici 6.11) koji za slučaj savijanja ima os apscisu maksimalni aksijalni moment inercije I_{max} , a os ordinatu površinu poprečnog presjeka A (slika 6.42). U dijagramu su ucrtane linije konstantnih vrijednosti faktora oblika. Postupak određivanja nagiba ovih linija i njihovog pozicioniranja se vrši počevši od izraza za faktor oblika za elastično savijanje:

$$\phi_B^e = \frac{12 \cdot I_{max}}{A^2} \quad (1)$$

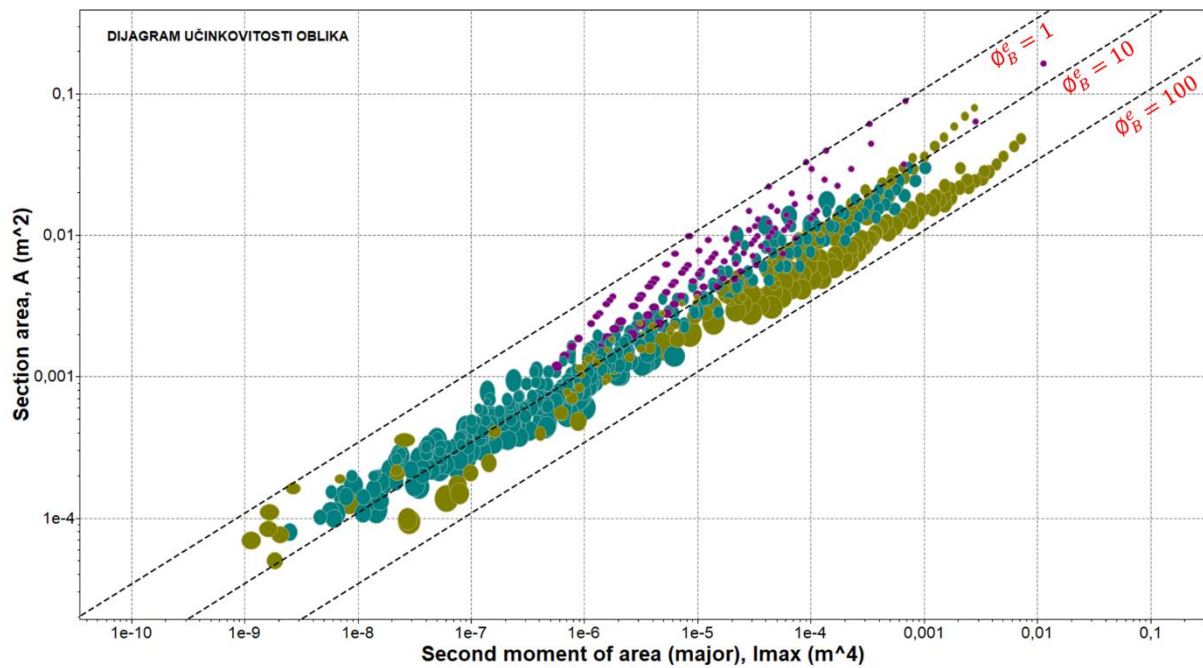
Ovaj izraz treba prilagoditi eksplicitnom obliku jednadžbe pravca u dijagramu učinkovitosti oblika pa slijedi:

$$A = I_{max}^{1/2} \cdot \left(\frac{12}{\phi_B^e} \right)^{1/2} \quad (2)$$

Logaritmiranjem izraza (2) dobiva se traženi oblik jednadžbe pravca:

$$\log A = \frac{1}{2} \cdot \log I_{max} + \frac{1}{2} \cdot \log \frac{12}{\phi_B^e} \quad (3)$$

Prema izrazu (3) proizlazi da linije konstantnih faktora oblika imaju nagib „ $1/2$ “, dok se vrijednost indeksa potrebnog za pozicioniranje linija u dijagramu određuje kao kvocijent $\frac{12}{\phi_B^e}$. U dijagramu su ucrtane linije za vrijednosti faktora oblika: 1, 10 i 100.



Slika 6.40 Dijagram učinkovitosti oblika „ $I_{max} - A$ “

Greda je opterećena na savijanje kontinuiranim opterećenjem od 3 kN. Koristeći izraz za progib pri elastičnom savijanju grede (ograničenje):

$$\delta_{max} = \frac{F \cdot L^3}{C_1 \cdot E \cdot I_{max}} \leq \delta_{dop} \quad (4)$$

Obzirom da je ograničenje krutost grede ključno svojstvo i za zadani primjer iznosi:

$$E \cdot I_{max} \geq \frac{F \cdot L^3}{C_1 \cdot \delta_{dop}} = \frac{3000 \cdot 4^3}{384 \cdot 0,05} = 10000 \text{ Nm}^2 \quad (5)$$

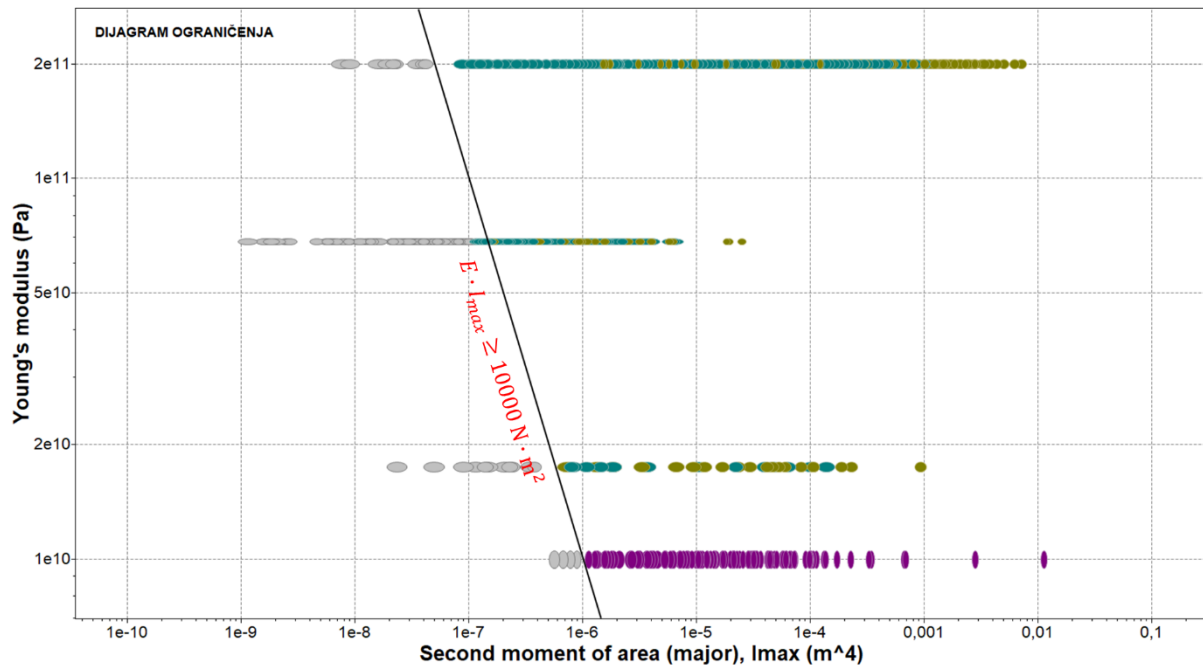
Treći dijagram kojeg treba generirati je dijagram ograničenja (drugi kvadrant na slici 6.11). Osi dijagrama moraju biti kompatibilne sa susjednim dijagramima. Apscisa dijagrama ograničenja je maksimalni aksijalni moment inercije, a ordinata modul elastičnosti (slika 6.43). U dijagramu su u crtane linije ograničenja. Crvena linija jest ograničenje minimalne krutosti materijala i oblika dobivene prethodnim proračunom. Položaj ove linije u dijagramu ograničenja određuje se počevši od izraza za samo ograničenje:

$$E \cdot I_{max} = 10000 \text{ Nm}^2 \quad (6)$$

Izraz (5) treba prikazati eksplicitnom obliku jednadžbe pravca prilagođene dijagramu ograničenja:

$$\log E = -1 \cdot \log I_{max} + \log 10000 \quad (7)$$

Prema izrazu (7) proizlazi da linija ograničenja ima nagib „-1“, dok je vrijednost indeksa potrebnog za pozicioniranje linije u dijagramu ograničenja jednaka 10000. Pri ucrtavanju linije ograničenja potrebno je voditi računa da mjerne jedinice osiju dijagrama trebaju biti kompatibilne mjernoj jedinici proračunatog ograničenja prema izrazu (5). Materijali koji zadovoljavaju ograničenje nalaze se desno od ucrtane crvene linije.



Slika 6.41 Dijagram ograničenja „ $I_{max} - E$ “

Četvrti dijagram koji treba generirati (četvrti kvadrant na slici 6.11) jest dijagram učinkovitosti materijala i oblika (slika 6.44). U dijagramu je ucrtana linija crvene boje za izbor najučinkovitije kombinacije materijala i oblika.

Položaj ove linije u dijagramu učinkovitosti materijala i oblika određuje se počevši od izraza za cilj:

$$C = A \cdot l \cdot \rho \cdot C_m \quad (8)$$

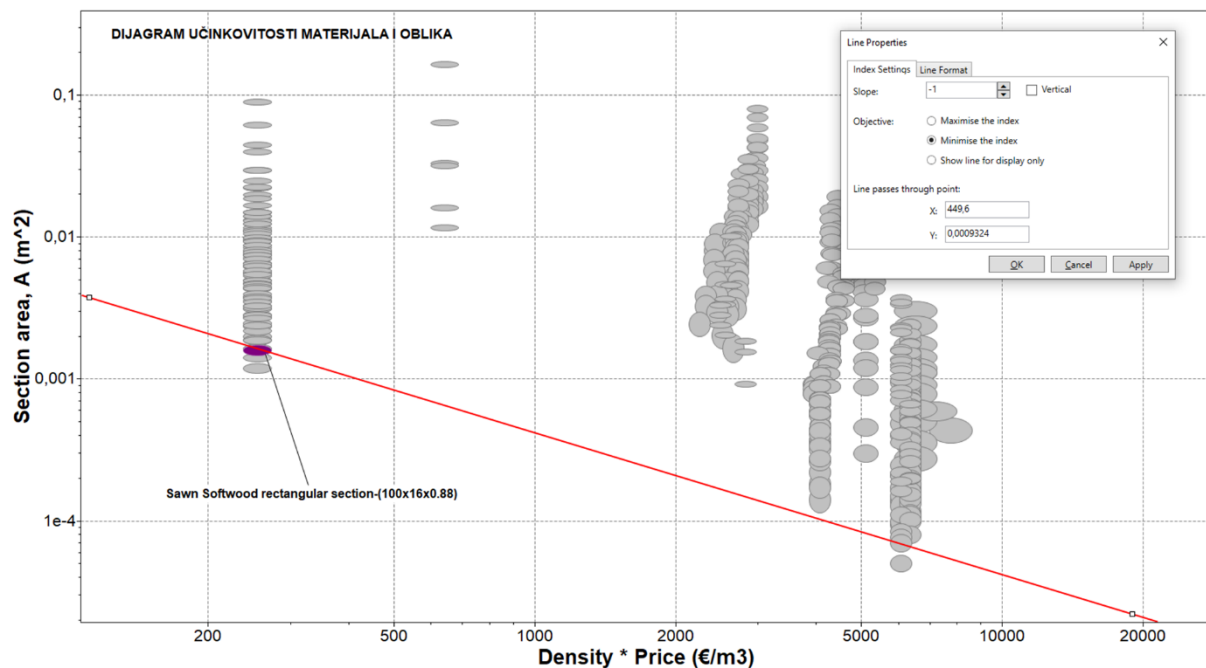
Prikaz izraza (8) u eksplicitnom obliku jednadžbe pravca prilagođene dijagramu:

$$\log A = -1 \cdot \log \rho \cdot C_m + \log \frac{C}{l} \quad (9)$$

Prema izrazu (9) linija za izbor najučinkovitije kombinacije materijal-oblik ima nagib „-1“, dok vrijednost indeksa koji se može očitati pomicanjem ove linije u dijagramu predstavlja

cijenu profila po jedinici duljine $\frac{C}{l}$. Izbor se optimira pomicanjem linije u područje minimalnih vrijednosti $\frac{C}{l}$ tj. prema donjem lijevom kutu dijagrama.

Vrijednost učinkovitosti (kvocijent $\frac{C}{l}$) se može očitati kao indeks koji se prikazuje u donjem lijevom dijelu prozora programa. Najbolja kombinacija materijala i oblika za laku i stabilnu nogicu je greda pravokutnog punog presjeka (*Sawn Softwood rectangular section*) cijev dimenzije 100x16x0.88 mm iz rezanog drva modula elastičnosti $E = 10$ GPa. Cijena po metru duljine grede iznosi 0,41 €/m.



Slika 6.42 Dijagram učinkovitosti materijala i oblika

7 IZBOR PROIZVODNOG PROCESA

7.1.1 Zadatak 1 – Izbor proizvodnog lanca za izradu vratila

Zadatak

Za izradu vratila prema slici 7.1 potrebno je izabrati proizvodni lanac. Vratilo duljine 204 mm i maksimalnog promjera 32 mm izrađeno je iz niskolegiranog čelika **AISI 4130** zakaljenog i popuštenog na temperaturi 540°C. Najveća tražena kvaliteta površine ležišta ležajeva odgovara srednjem aritmetičkom odstupanju profila $Ra = 0.4 \mu\text{m}$ što odgovara hrapavosti $Rz = 1.6 \mu\text{m}$. Najmanja tolerancija je $\varnothing 25 \text{ } h5$ što odgovara izmjeri (od 24,99 mm do 25,00 mm). Masa sirovca iz kojega se izrađuje vratilo iznosi 1,5 kg. Pretpostavljena veličina serije: 100.000 kom.

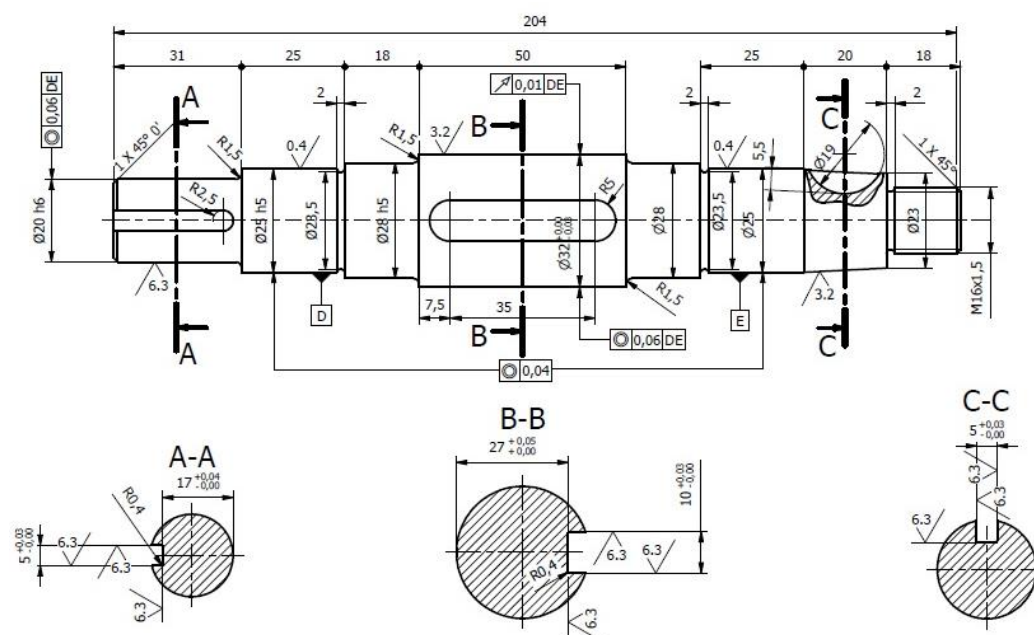
Treba odrediti proizvodne postupke:

- rezanja i
- završne obrade.

Napomena: Prilikom izbora procesa zanemariti obradu utora za klin!

Za odabrani proizvodni lanac treba konstruirati dijagrame:

- a) "Veličina serije - Trošak proizvodnog lanca" za slučaj manjih ulaganja u opremu
- b) "Veličina serije - Trošak proizvodnog lanca" za slučaj većih ulaganja u opremu



Slika 7.1 Radionički crtež vratila

Rješenje**TABLICA SA ZAHTJEVIMA DIZAJNA**

Na temelju ulaznih podataka formira se tablica 7.1 sa zahtjevima dizajna:

Tablica 7.1 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor proizvodnog lanca za izradu vratila

Zahtjevi dizajna za izradu vratila	
FUNKCIJA	Vratilo prijenosnika
OGRANIČENJA	Materijal: Čelik AISI 4130 zakaljen i popušten na temperaturi 540°C Oblik: Okrugli prizmatični Procijenjena masa: 1,5 kg Minimalni promjer: 16 mm Tolerancije: $\leq 0,01$ mm Hrapavost: 1.6 μm Serijski broj: 10.000 kom
CILJ	Minimalna cijena vratila
SLOBODNE VARIJABLE	- Izbor procesa - Parametri procesa - Proizvodni lanac

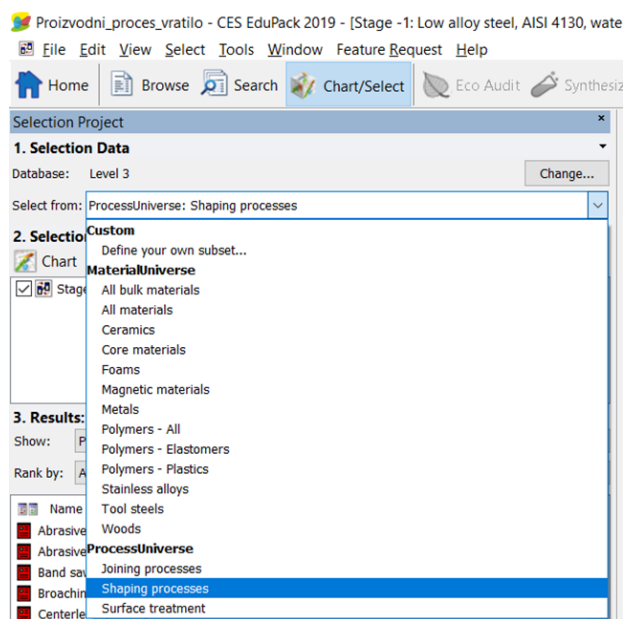
Pretpostavka je da će se kao sirovac koristiti šipka odgovarajućeg promjera na kojima će biti izvršena obrada odvajanjem čestica. Fina tolerancija i hrapavost će se realizirati procesom završne obrade, pa se u fazi izbora procesa obrade oblikovanja vratila uzima nešto grublja tolerancija ($\leq 0,02$ mm), a ograničenje hrapavosti se ne uzima u obzir. Dakle, za slučaj izbora procesa rezanja koristiti će se slijedeća ograničenja prikazana u tablici 7.2.

Tablica 7.2 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor procesa rezanja za izradu vratila

Zahtjevi dizajna za izbor procesa rezanja za izradu vratila	
FUNKCIJA	Vratilo prijenosnika
OGRANIČENJA	Materijal: Čelik AISI 4130 zakaljen i popušten na temperaturi 540°C Oblik: Okrugli prizmatični Procijenjena masa: 1,5 kg Minimalni promjer: 16 mm Tolerancije: $\leq 0,02$ mm (primjereno za finu obradu rezanjem) Serijska: 10.000 kom
CILJ	Minimalna cijena vratila
SLOBODNE VARIJABLE	- Izbor procesa rezanja - Parametri procesa

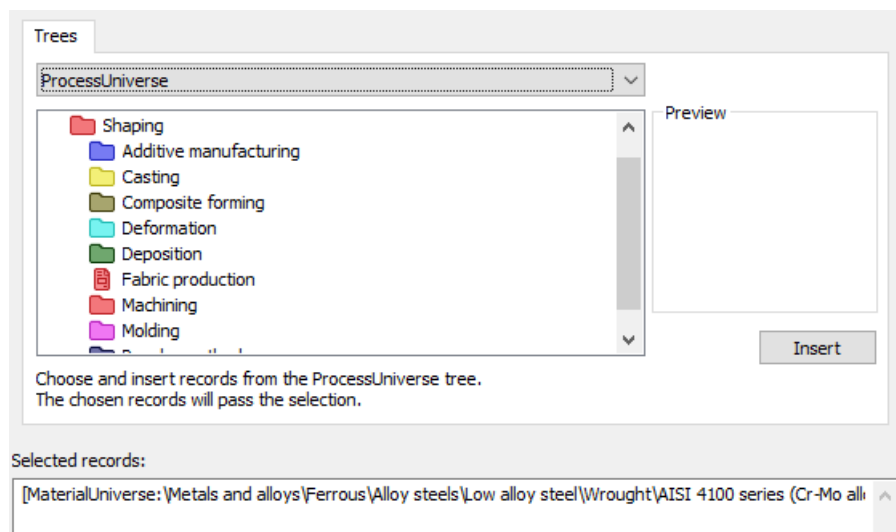
IZBOR PROCESA OBLIKOVANJA VRATILA

Prvi korak je u bazi podataka odabrati dio baze podataka koji se odnosi na proizvodne procese oblikovanja. Ovo se može realizirati odabirom padajućeg izbornika “Select from:” koji se nalazi u okviru “1. Selection data” te izborom “ProcessUniverse – Shaping Processes” prema slici 7.2.



Slika 7.2 Izbor dijela baze podataka proizvodnih procesa - procesi oblikovanja

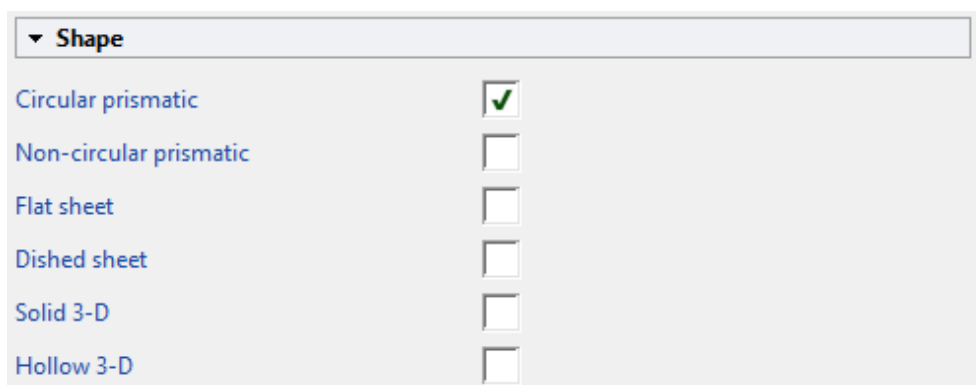
Na temelju podatka iz tablice 7.2 sa zahtjevima dizajna u program se uvodi ograničenje materijala prema slici 7.3.



Slika 7.3 Primjena ograničenja materijala u programu Granta EduPack

Na slici 7.4 je prikazan unos ograničenja proizvodnog procesa (“Limit stage”) koje se sastoji iz:

- ograničenja oblika (slika 7.4),
- ograničenja mase i dimenzija (slika 7.5),
- ograničenja karakteristike proizvodnog procesa (slika 7.6) i
- ekonomskog ograničenja (slika 7.7).



Slika 7.4 Primjena ograničenja oblika

▼ Physical attributes				
		Minimum	Maximum	
Mass range			1,5	kg
Range of section thickness				mm
Tolerance			0,02	mm
Roughness				μm
Cutting speed				m/s
Minimum cut width				mm

Slika 7.5 Primjena ograničenja mase i dimenzija

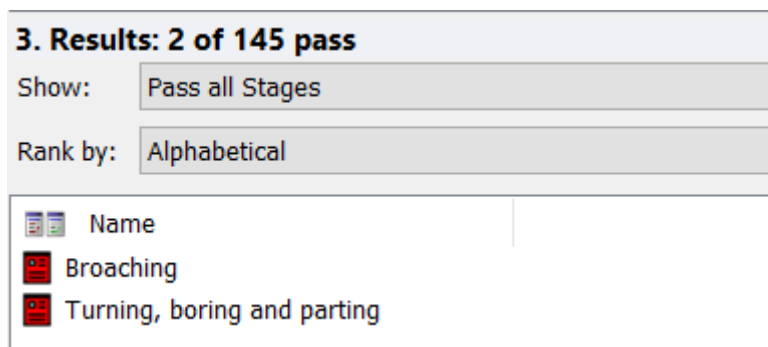
▼ Process characteristics	
Primary shaping processes	☐
Secondary shaping processes	☒
Machining processes	☒
Cutting processes	☒
Prototyping	☐
Discrete	☒
Continuous	☐

Slika 7.6 Primjena ograničenja karakteristike proizvodnog procesa

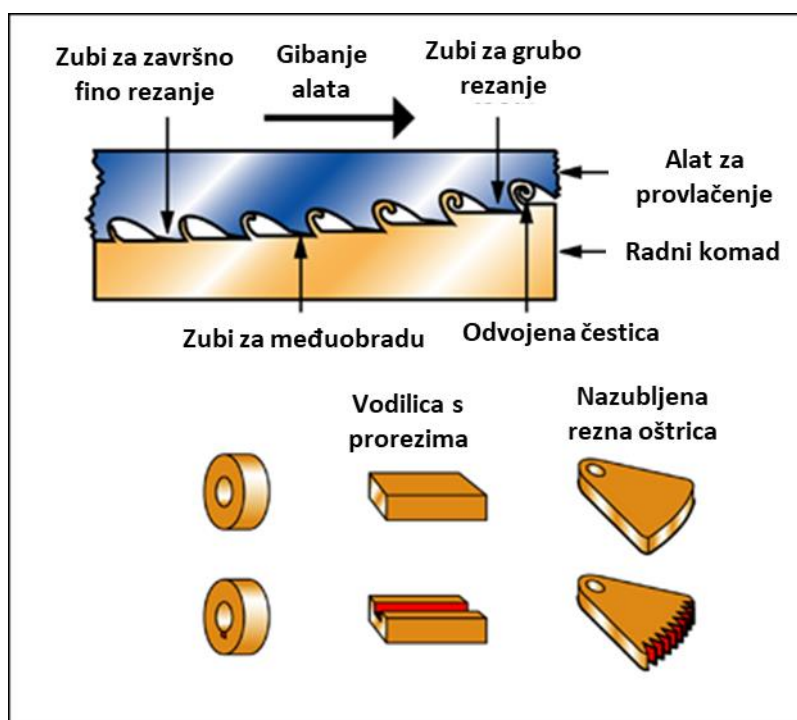
▼ Economic attributes		
	Minimum	Maximum
Economic batch size (units)	 10000	

Slika 7.7 Primjena ekonomskog ograničenja

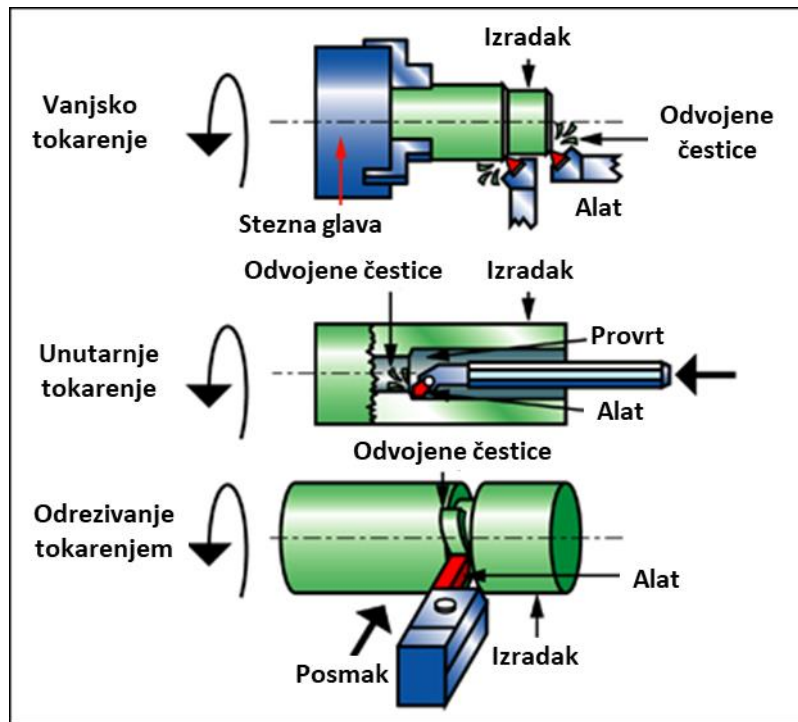
Nakon postavljenih ograničenja identificirani su procesi koji zadovoljavaju sva postavljena ograničenja prikazani na slici 7.8. Shematski prikaz identificiranih proizvodnih postupaka rezanja dan je na slikama 7.9, i 7.10. Uvidom u ponuđene procese, bez posebne ekonomske analize, može se zaključiti da proces prikazan na slici 7.9 nije adekvatan za oblikovanje vratila te se kao konačni izbor procesa rezanja odabire tokarenje ("*Turning, boring and parting*") - slika 7.10.



Slika 7.8 Popis procesa koji zadovoljavaju ograničenja



Slika 7.9 Provlačenje ("*Broaching*")



Slika 7.10 Tokarenje ("Turning, boring and parting")

EKONOMSKA ANALIZA PROCESA REZANJA TOKARENJEM

Za odabrani proces tokarenja u korištenoj bazi podataka nisu dostupni atributi za modeliranje troškova.

Atributi za modeliranje troška biti će procijenjeni prema dostupnim informacijama (internet, katalozi, dobavljači...):

- Kapitalni trošak 10000 – 200000 €
- Trošak kompleta alata: 500 - 2000 €
- Vijek trajanja kompleta alata: 1000 - 8000 kom
- Proizvodna stopa: 5 - 60 kom/h
- Udio otpadnog materijala: 25%

U tablici 7.3 prikazani su svi potrebni atributi za analizu troškova oblikovanja tokarenjem.

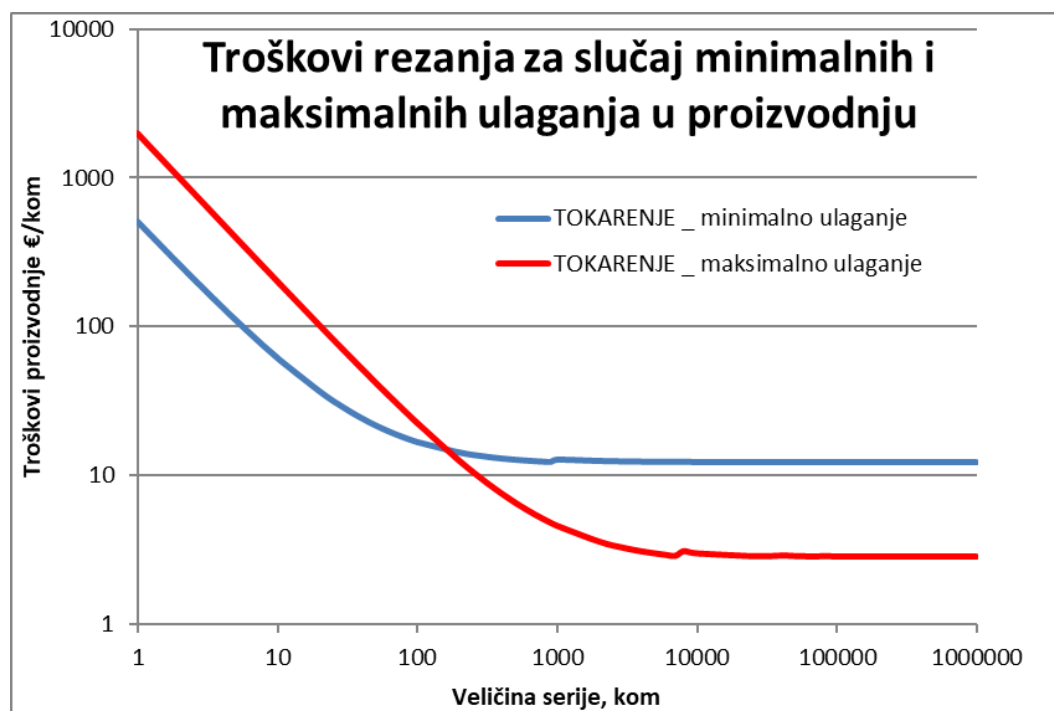
Tablica 7.3 Tablica s atributima troškova za proces oblikovanja tokarenjem

	Donja vrijednost	Gornja vrijednost
Procijenjena masa vratila: m , kg	1,5	1,5
Udio otpadnog materijala: f , %	25	25
Cijena materijala: C_m , €/kg	0,72	0,72
Fiksni trošak: C_{oh} , €/h	50	60
Vrijeme otpisa: t_{wo} , godina	5	5
Faktor opterećenja: L	0.5	0.5
Trošak alata: C_t , €	500	2000
Kapitalni trošak: C_c , €	10000	200000
Stopa proizvodnje: $\dot{n}$, kom/h	5	60
Vijek trajanja alata: n_t , kom	1000	8000

Dijagrami u nastavku dobiveni su korištenjem izraza za analizu troška:

$$C_s = \frac{m \cdot C_m}{1-f} + \frac{C_t}{n} \left[\text{Int} \left(\frac{n}{n_t} + 0,51 \right) \right] + \frac{1}{\dot{n}} \cdot \left(\frac{C_c}{L \cdot t_{wo}} + C_{oh} \right)$$

Za prikazane attribute procesa korištenjem MS Excel tablice generiran je dijagram na slici 7.11 za slučaj minimalnih i za slučaj maksimalnih ulaganja u opremu.

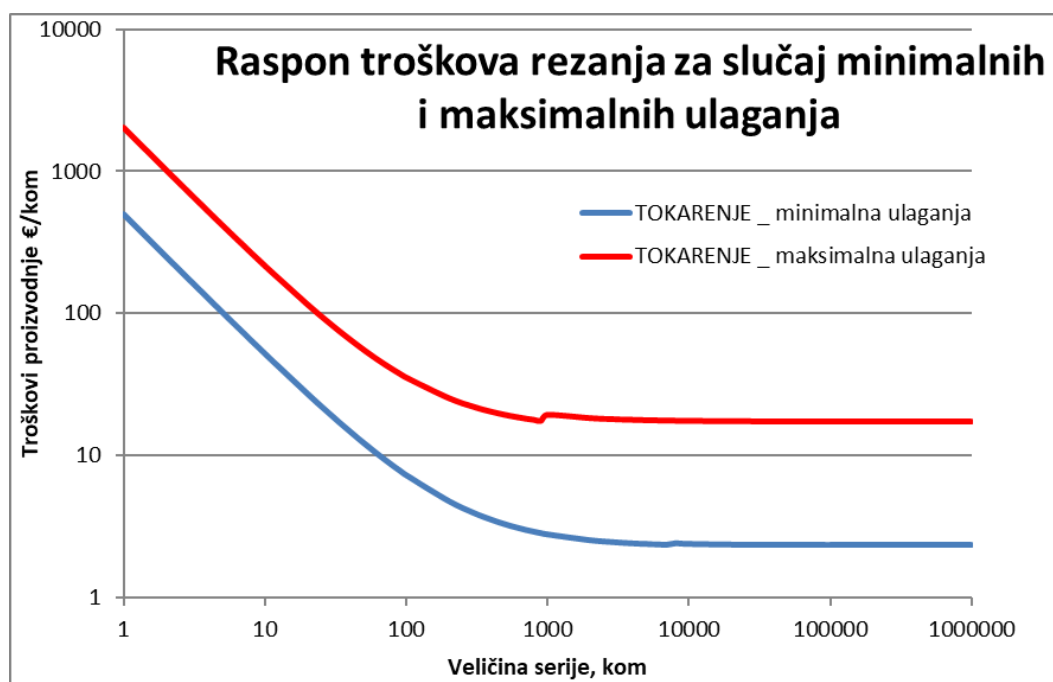


Slika 7.11 Troškovi tokarenja za slučaj minimalnih i maksimalnih ulaganja u proizvodnju

Očito da se za serije veće od 200 kom isplati razmisliti o većim ulaganjima u proizvodni proces. Svakako treba računati da je za proizvodnju predviđene veličine serije u slučaju maksimalnih ulaganja potrebno samo 166 radnih sati što znači da će se obradom vratila amortizirati samo mali dio kapitalne opreme za koju je predviđeno vrijeme amortizacije $5 \cdot 365 \cdot 24 = 43800$ sati. Za slučaj minimalnih ulaganja za proizvodnju će biti potrebno 2000 radnih sati. Dakle, treba voditi računa da oprema treba biti korištena i za druge poslove. Ukoliko bi se oprema koristila za seriju od 200000 komada, tada bi oprema nabavljena uz minimalna ulaganja bila u potpunosti amortizirana.

Korištenjem istih podataka (tablica 7.3) generiran je dijagram prikazan na slici 7.12 u kojem se vidi raspon mogućih troškova.

Napomena: Za dobivanje krivulje **donje vrijednosti raspona troškova** treba uvrstiti **veće vrijednosti** vijeka trajanja alata n_t , stope proizvodnje $\tilde{n}$, te manje vrijednosti troška alata C_t , kapitalnog troška C_c , udjela otpadnog materijala f i fiksnih troškova C_{oh} . Za dobivanje krivulje gornje vrijednosti vrijedi suprotno. Pretpostavka je da su mase materijala m , faktor opterećenja L , vrijeme otpisa t_{wo} i cijena materijala C_m isti za gornju i donju krivulju raspona troškova.



Slika 7.12 Raspon troškova rezanja za slučaj minimalnih i za slučaj maksimalnih ulaganja u opremu

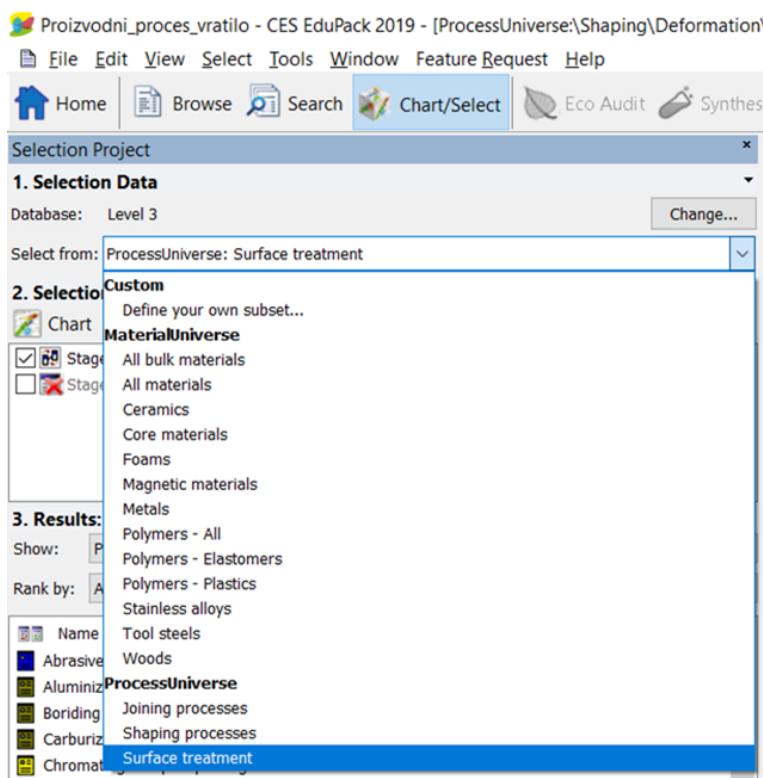
TABLICA SA ZAHTJEVIMA DIZAJNA ZA IZBOR PROCESA ZAVRŠNE OBRADE

Za slučaj izbora procesa završne obrade koristiti će se slijedeća ograničenja prikazana u tablici 7.4 sa zahtjevima dizajna za završnu obradu.

Tablica 7.4 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor procesa završne obrade vratila

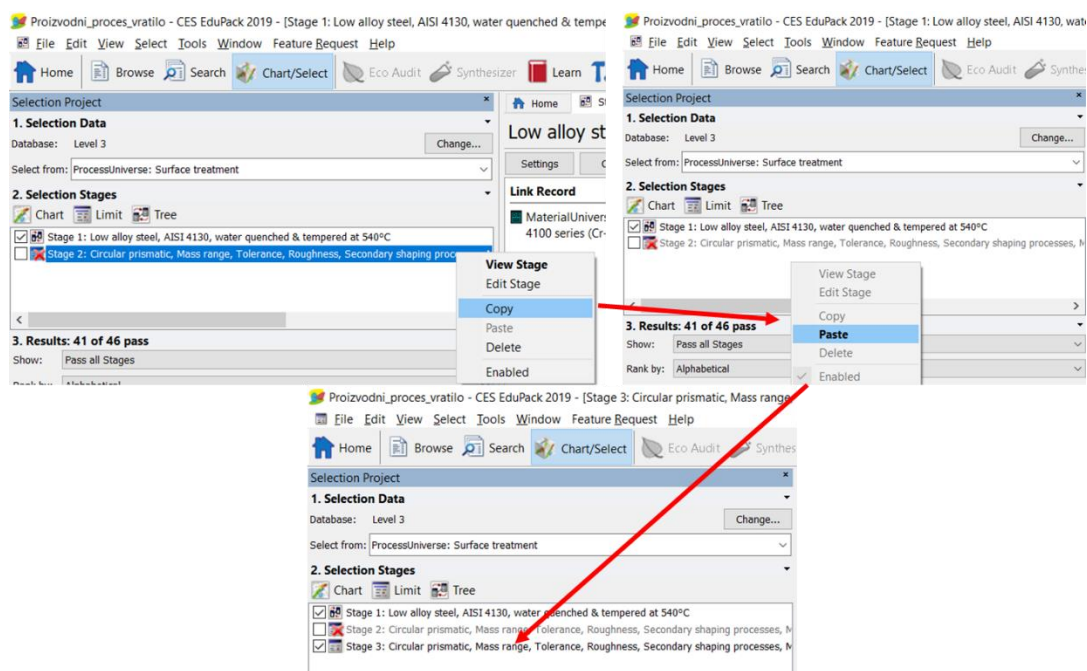
Zahtjevi dizajna za izbor procesa završne obrade za izradu vratila	
FUNKCIJA	Vratilo prijenosnika
OGRANIČENJA	Materijal: Čelik AISI 4130 zakaljen i popušten na temperaturi 540°C Oblik: Okrugli prizmatični Minimalni promjer: 16 mm Ne odnosi se na završnu obradu (debljina sloja koja se skida obradom rezanja)! Tolerancije: $\leq 0,01$ mm Hrapavost: 1.6 μm Serijski broj: 10.000 kom
CILJ	Minimalna cijena vratila
SLOBODNE VARIJABLE	- Izbor procesa završne obrade - Parametri procesa

Prvi korak je u bazi podataka odabrati dio baze podataka koji se odnosi na proizvodne procese završne obrade. Ovo se može realizirati odabirom padajućeg izbornika “Select from:” koji se nalazi u okviru “1. Selection data” te izborom “ProcessUniverse – Surface treatment” prema slici 7.13.



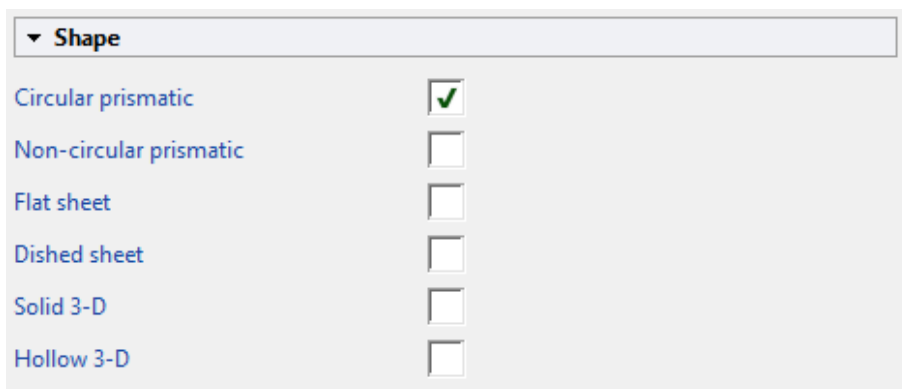
Slika 7.13 Izbor dijela baze podataka proizvodnih procesa - procesi površinske obrade

Ranije je izvršen unos ograničenja materijala prema slici 7.3. Unos ograničenja se vrši kopiranjem ograničenja za procese oblikovanja te aktiviranjem istog prema slici 7.14.



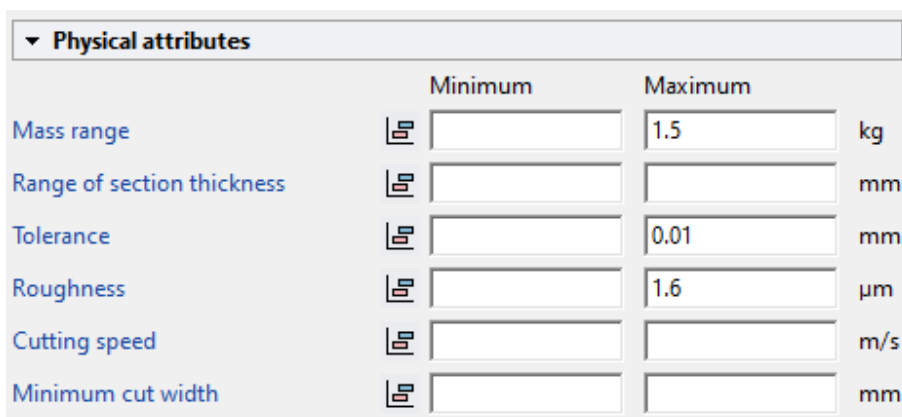
Slika 7.14 Kopiranje i aktiviranje izbornika s ograničenjima procesa

Unos ograničenja oblika („*Limit stage - Shape*“) prikazan je na slici 7.15. Unos ograničenja fizikalnih atributa mase, tolerancija i hrapavosti („*Limit stage - Physical attributes*“) su prikazani na slici 7.16. Unos ograničenja karakteristika procesa („*Limit stage - Process Characteristics*“) prikazan je na slici 7.17. Odabrani su diskretni procesi (proizvodnja odvojenih komada). Kontinuirani procesi se odnose na pr. na proizvodnju kablova, žice ili sl. Konačno, unos ograničenja ekonomskih atributa („*Limit stage - Economic attributes*“) prikazan je na slici 7.18.



▼ Shape	
Circular prismatic	☒
Non-circular prismatic	☐
Flat sheet	☐
Dished sheet	☐
Solid 3-D	☐
Hollow 3-D	☐

Slika 7.15 Unos ograničenja oblika („*Limit stage*“)



▼ Physical attributes				
		Minimum	Maximum	
Mass range			1.5	kg
Range of section thickness				mm
Tolerance			0.01	mm
Roughness			1.6	μm
Cutting speed				m/s
Minimum cut width				mm

Slika 7.16 Unos ograničenja fizikalnih atributa

▼ **Process characteristics**

Primary shaping processes	☐
Secondary shaping processes	☐
Machining processes	☐
Cutting processes	☐
Prototyping	☐
Discrete	☒
Continuous	☐

Slika 7.17 Unos ograničenja karakteristika procesa

▼ **Economic attributes**

	Minimum	Maximum
Economic batch size (units)		100000
Relative equipment cost		
Relative tooling cost		
Labor intensity		

Slika 7.18 Unos ekonomskih ograničenja

REZULTATI IZBORA PROCESA POVRŠINSKE OBRADJE

Na temelju unesenih ograničenja iz baze podataka izdvojeni su procesi površinske obrade koji zadovoljavaju postavljena sva ograničenja (slika 7.19).

3. Results: 2 of 46 pass

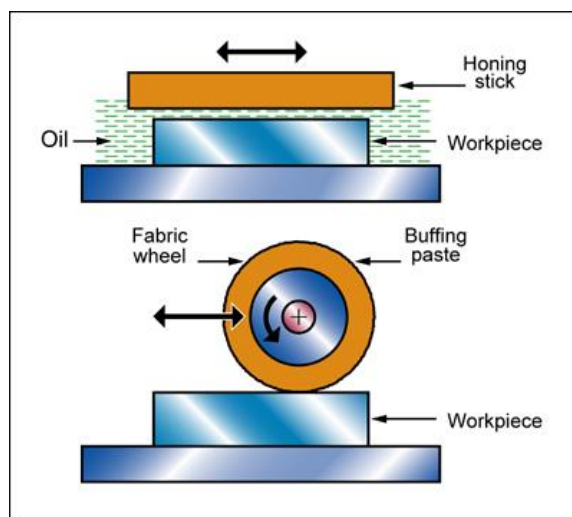
Show:

Rank by:

Name
Micropolishing (automated)
Micropolishing (manual)

Slika 7.19 Rezultati - procesi kojim se može obaviti završna obrada

Na slici 7.20 shematski je prikazan proces mikropoliranja.



Slika 7.20 Shema proces površinske obrade mikropoliranja

EKONOMSKA ANALIZA PROCESA ZAVRŠNE OBRADJE

Procesi površinske obrade koji zadovoljava postavljena ograničenja su automatizirano i manualno mikropoliranje.

Dostupni atributi za modeliranje troškova za proces površinske obrade manualnog mikropoliranja su prikazani u tablici 7.5, a atributi za proces automatiziranog mikropoliranja su prikazani u tablici 7.6.

Tablica 7.5 Atributi procesa potrebni za modeliranje troškova za manualno mikropoliranje

Cost modeling

Capital cost	(i)	* 807	-	8,07e3	EUR
Material utilization fraction	(i)	0,95	-	0,99	
Production rate (units)	(i)	0,2	-	15	/hr
Tool life (units)	(i)	100	-	300	
Tooling cost	(i)	* 161	-	8,07e3	EUR

Tablica 7.6 Atributi procesa potrebni za modeliranje troškova za automatizirano mikropoliranje

Cost modeling

Capital cost	(i)	* 8,07e3	-	8,07e4	EUR
Material utilization fraction	(i)	0,95	-	0,99	
Production rate (units)	(i)	* 10	-	200	/hr
Tool life (units)	(i)	1e3	-	1e4	
Tooling cost	(i)	* 484	-	4,84e3	EUR

U tablici 7.7 su prikazani svi potrebni atributi za analizu troškova manualnog mikropoliranja (u tablici je korigirana donja vrijednost stope proizvodnje).

Tablica 7.7 Atributi za modeliranje troškova za manualno mikropoliranje

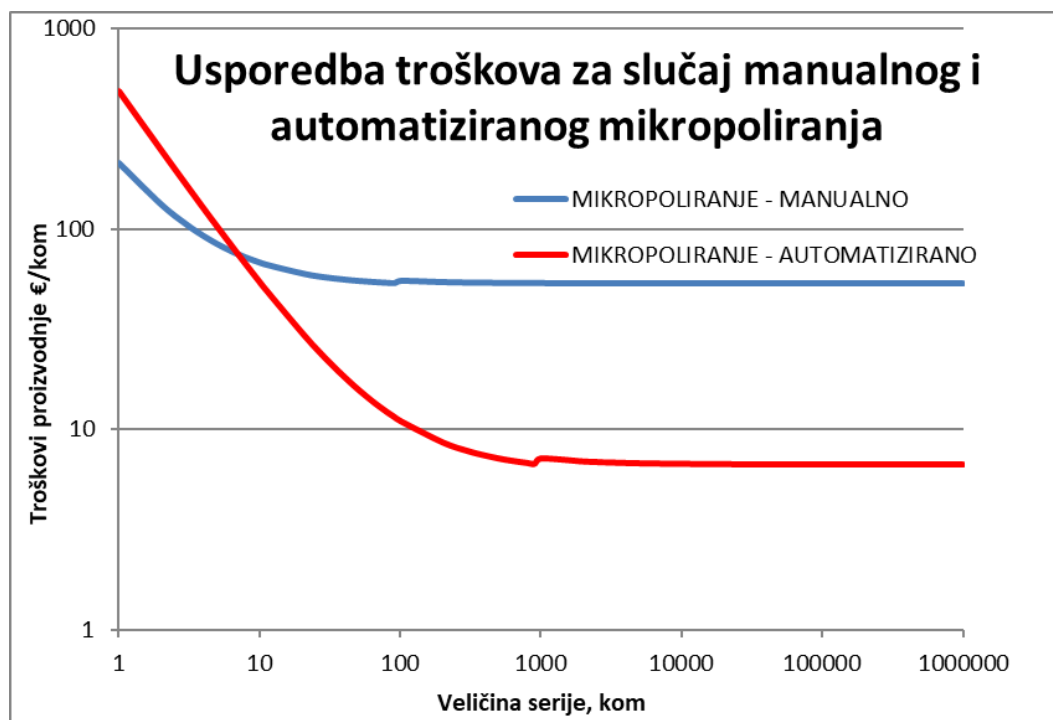
	Donja vrijednost	Gornja vrijednost
Procijenjena masa vratila: m , kg	1,5	1,5
Udio otpadnog materijala: f , %	1	5
Cijena materijala: C_m , €/kg	0,72	0,72
Fiksni trošak: C_{oh} , €/h	50.67	60
Vrijeme otpisa: t_{wo} , godina	5	5
Faktor opterećenja: L	0.5	0.5
Trošak alata: C_t , €	161	8070
Kapitalni trošak: C_c , €	807	8070
Stopa proizvodnje: $\tilde{n}$, kom/h	1	15
Vijek trajanja alata: n_t , kom	100	300

U tablici 7.8 su prikazani potrebni atributi za analizu troškova automatiziranog mikropoliranja.

Tablica 7.8 Atributi za modeliranje troškova za automatizirano mikropoliranje

	Donja vrijednost	Gornja vrijednost
Procijenjena masa vratila: m , kg	1,5	1,5
Udio otpadnog materijala: f , %	1	5
Cijena materijala: C_m , €/kg	0,72	0,72
Fiksni trošak: C_{oh} , €/h	50,67	60
Vrijeme otpisa: t_{wo} , godina	5	5
Faktor opterećenja: L	0.5	0.5
Trošak alata: C_t , €	487	4867
Kapitalni trošak: C_c , €	8107	81067
Stopa proizvodnje: $\tilde{n}$, kom/h	10	200
Vijek trajanja alata: n_t , kom	1000	10000

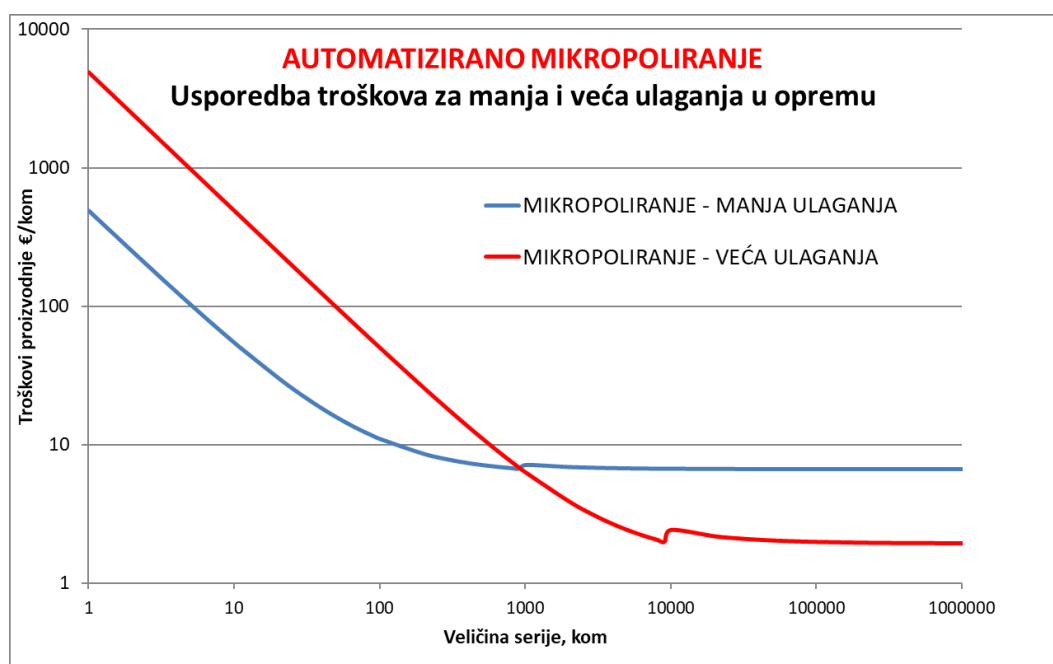
Kod međusobne usporedbe procesa (slika 7.21) uzete su u obzir donje vrijednosti atributa prikazane u tablicama 7.7 i 7.8.



Slika 7.21 Usporedba troškova za slučaj manualnog i automatiziranog mikropoliranja (donje vrijednosti atributa)

Za planiranu seriju od 10000 komada očito je povoljniji **proces automatiziranog mikropoliranja** (jedinična cijena za manualno mikropoliranje iznosi 53,42 €/kom, a za automatizirano mikropoliranje 6,73 €/kom)!

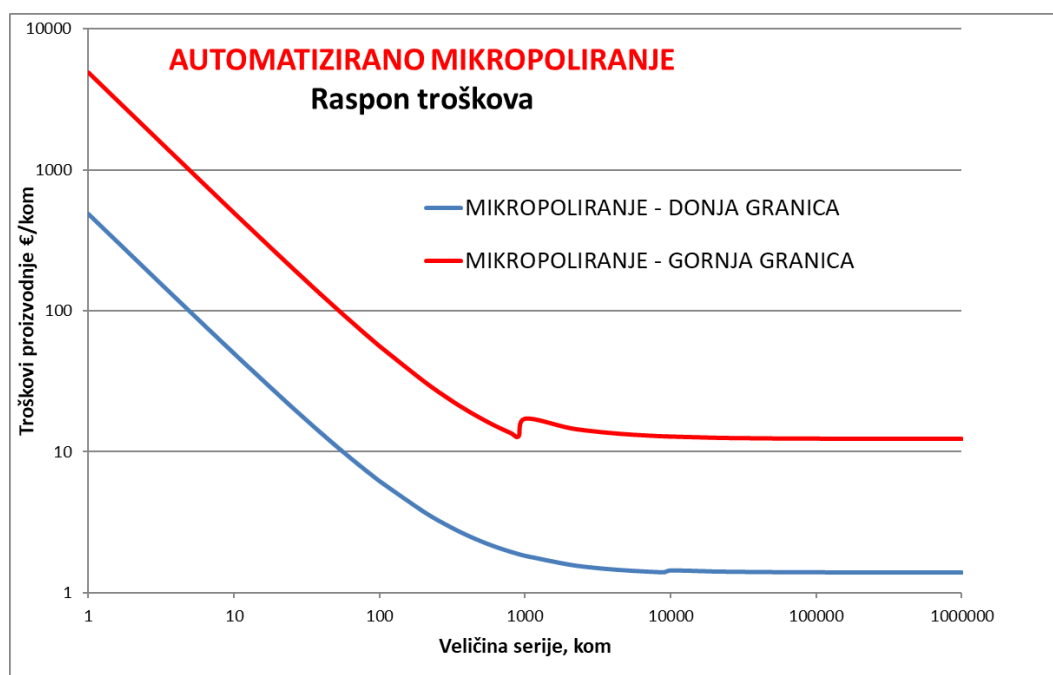
U nastavku je analiziran slučaj većih i manjih ulaganja u opremu (slika 7.22) za automatizirano mikropoliranje.



Slika 7.22 Usporedba troškova za slučaj automatizirano mikropoliranje za manja i veća ulaganja u opremu

Za planiranu veličinu serije (10000 komada) više se isplate veća ulaganja koja značajno smanjuju jedinični trošak proizvodnje (sa 6,72 €/kom na 2,43 €/kom).

Raspon mogućih troškova za proces automatiziranog mikropoliranja prikazan je na slici 7.23.



Slika 7.23 Raspon mogućih troškova za proces automatiziranog mikropoliranja

ANALIZA TROŠKOVA PROIZVODNOG LANCA

Analiza troškova proizvodnog lanca podrazumijeva sumu kapitalnih troškova i troškova alata (za svaki proces u lancu posebno) te trošak materijala i fiksni trošak (samo za jedan proces – kako ne bi došlo do dupliranja troškova).

$$C_S = C_{1A} + C_{2A} + C_{3A} + C_{4A} + C_{2B} + C_{3B} + C_{2C} + C_{3C} \dots$$

gdje je:

C_1 – trošak materijala;

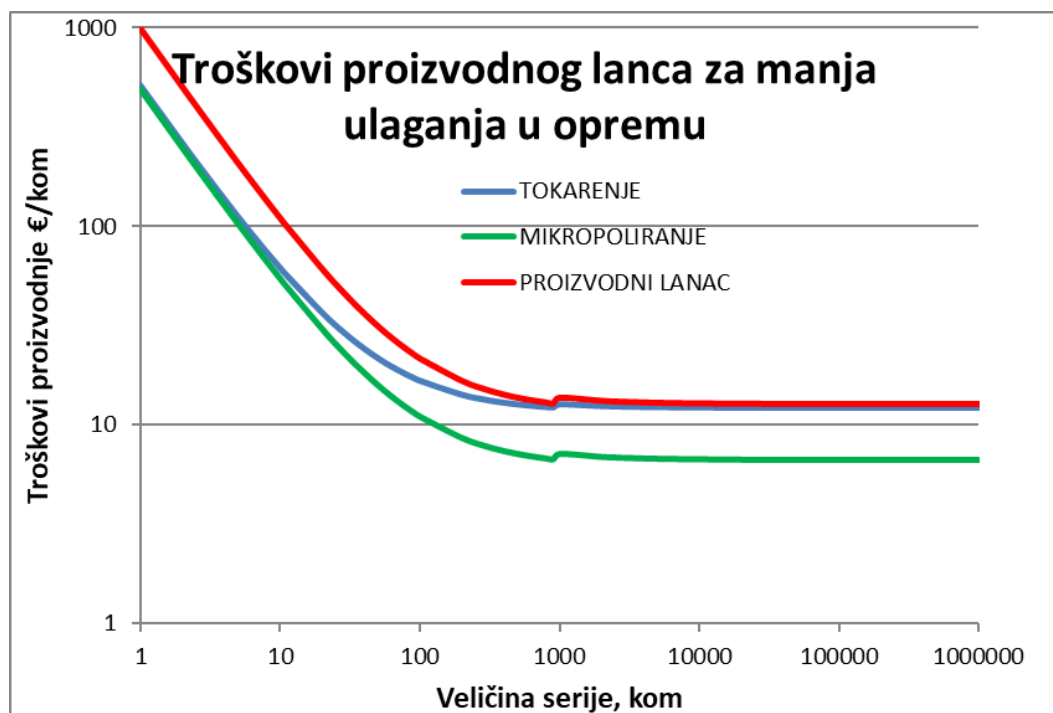
C_2 – trošak alata;

C_3 – kapitalni trošak;

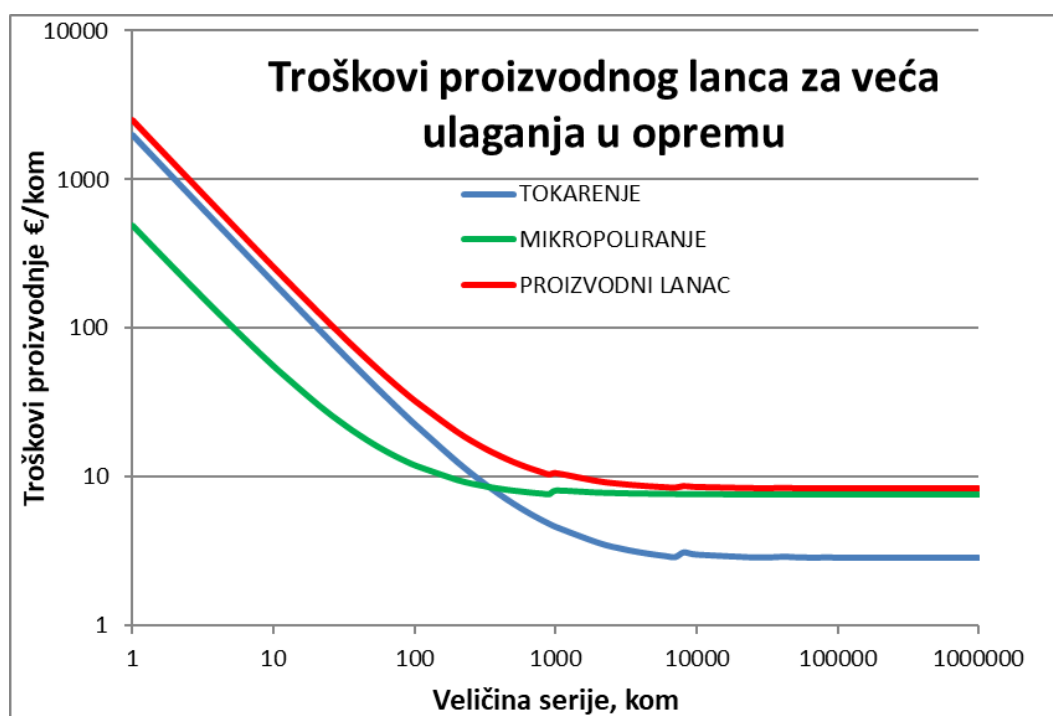
C_4 – fiksni trošak;

$A, B, C \dots$ – proizvodni procesi u lancu;

Na temelju podataka u dijagramu troškova proizvodnje (slika 7.24) u slučaju manjih ulaganja u opremu za očekivati je ukupan trošak materijala i proizvodnje od **12,79 €/kom**



Slika 7.24 Troškovi proizvodnog lanca u slučaju manjih ulaganja u opremu



Slika 7.25 Troškovi proizvodnog lanca u slučaju većih ulaganja u opremu

Na temelju podataka u dijagram troškova proizvodnje (slika 7.25) u slučaju većih ulaganja u opremu (slika 7.2) za očekivati je ukupan trošak materijala i proizvodnje od **8,56 €/kom.**

ZAKLJUČAK

Ovisno o zahtjevima tržišta (rokovima za proizvodnju) moguća su dva pristupa i to:

Za slučaj kratkih rokova isporuke: nabavka 3 jedinice za tokarenje čime se vrijeme potrebno za obradu čitave serije skraćuje na 556 sati (u ovom slučaju rastu kapitalni troškovi; smanjuje se fiksni trošak; trošak alata po komadu ostaje isti).

Za slučaj dugih rokova: Može se promisliti o nabavci jeftinijeg stroja (manja proizvodna stopa) za automatizirano mikropoliranje (u ovom slučaju smanjuju se kapitalni troškovi; raste fiksni trošak; trošak alata je nešto manji).

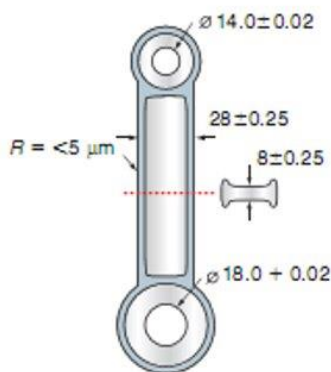
U oba slučaja potrebno je provesti analizu troškova na sličan način kako je to obavljeno u prethodnim poglavljima. Mapa u kojoj se nalaze excel datoteke sa svim generiranim dijagramima dostupna je na poveznici u mapi pod nazivom „Zadatak 7.1.1.“:

<https://moodle.oss.unist.hr/mod/folder/view.php?id=50644>

7.1.2 Zadatak 2 – Proces oblikovanja čelične klipnjače

Zadatak

Treba odrediti najpovoljniji proizvodni postupak oblikovanja čelične klipnjače motora (slika 7.26) ako je minimalni presjek debljine $b = 8$ mm, a procijenjena masa klipnjače $m = 0,35$ kg.



Slika 7.26 Čelična klipnjača motora

Dimenzionalna preciznost je bitna kako bi se osigurao razmak malog i velikog provrta. Klipnjača je dinamički opterećena što povećava opasnost pojave pukotine uslijed zamora materijala – zbog čega je neophodno da površinska hrapavost bude $R_A < 0,5 \mu\text{m}$. Provrti se naknadno obrađuju strojnom obradom.

Planirana je serija od $n = 10.000$ komada.

Kako bi se izbjegao lom uslijed zamora, važan korak predstavlja kontrola svojstava materijala i eventualnih grešaka nastalih procesom proizvodnje. Zahtjevi dizajna su sažeti u tablici 7.9.

U donjem dijelu tablice su upozorenja koja se ne mogu uočiti u fazi eliminacije procesa koji ne zadovoljavaju ograničenja, već pregledom dokumentacije procesa.

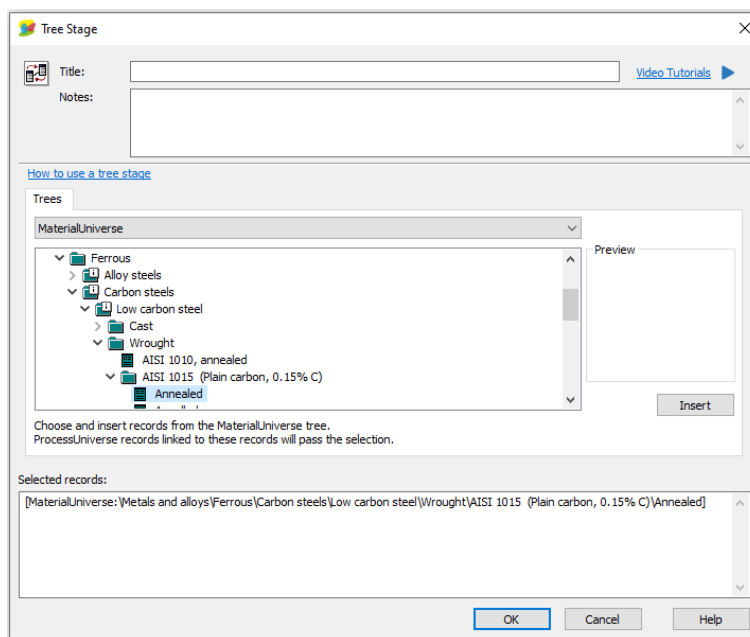
Tablica 7.9 Tablica sa zahtjevima dizajna za izbor procesa oblikovanja čelične klipnjače

Zahtjevi dizajna za izbor procesa završne obrade za izradu vratila	
FUNKCIJA	Klipnjača motora
OGRANIČENJA	Materijal: Ugljični čelik, AISI 1015, žaren Oblik: puni 3D Masa: 0,35 kg Minimalni presjek: 8 mm Tolerancije: < 0,25 mm (površina) < 0,02 mm (provrti) Hrapavost: 0,5 μm Serijska: 10.000 kom
CILJ	Minimalna cijena klipnjače
SLOBODNE VARIJABLE	- Izbor procesa završne obrade - Parametri procesa
GREŠKE	- Pukotine, površinske hrapavosti - Porozitet - Zaostala naprezanja navedene greške utječu na dinamičku izdržljivost klipnjače

IZBOR PROCESA OBLIKOVANJA KLIPNJAČE MOTORA

Prvi korak je u bazi podataka odabrati dio baze podataka koji se odnosi na proizvodne procese oblikovanja. Ovo se može realizirati odabirom padajućeg izbornika “Select from:” koji se nalazi u okviru “1. Selection data” te izborom “ProcessUniverse – Shaping Processes” prema slici 7.2.

Na temelju podatka iz tablice 7.9 sa zahtjevima dizajna u program se uvodi ograničenje materijala („Tree stage“) prema slici 7.27. Unos ograničenja oblika („Limit stage - Shape“) i fizikalnih svojstava („Limit stage – Physical attributes“) prikazan je na slici 7.28. Unos ograničenja karakteristika procesa („Limit stage - Process Characteristics“) i ekonomskih atributa („Limit stage - Economic attributes“) prikazan je na slici 7.29. Odabrani su primarni procesi oblikovanja i diskretni procesi (proizvodnja odvojenih komada).



Slika 7.27 Unos ograničenja materijala

▼ Shape			
Circular prismatic	☐		
Non-circular prismatic	☐		
Flat sheet	☐		
Dished sheet	☐		
Solid 3-D	☒		
Hollow 3-D	☐		
▼ Physical attributes			
	Minimum	Maximum	
Mass range	0,35	0,35	kg
Range of section thickness	8	8	mm
Tolerance		0,25	mm
Roughness	0,5		μm
Cutting speed			m/s
Minimum cut width			mm

Slika 7.28 Unos ograničenja oblika i fizikalnih svojstava

The screenshot shows a software interface with two main sections: 'Process characteristics' and 'Economic attributes'.

Process characteristics:

- Primary shaping processes: ☒
- Secondary shaping processes: ☐
- Machining processes: ☐
- Cutting processes: ☐
- Prototyping: ☐
- Discrete: ☒
- Continuous: ☐

Economic attributes:

	Minimum	Maximum
Economic batch size (units)	10000	
Relative equipment cost		
Relative tooling cost		
Labor intensity		

Slika 7.29 Unos ograničenja karakteristika procesa i ekonomskih atributa

Nakon postavljenih ograničenja identificirani su procesi koji zadovoljavaju sva postavljena ograničenja (slika 7.30). Proces koji zadovoljavaju sva postavljena ograničenja su hladno kovanje u zatvorenom kalupu („Cold closed die forging“ – slika 7.31) i prešanje u kalupu i sraštanje („Die pressing and sintering“ – slika 7.32).

The screenshot shows a software interface with the following elements:

- Section header: **3. Results: 2 of 145 pass**
- Show: Pass all Stages
- Rank by: Alphabetical
- Table with 2 rows:

Name
Cold closed die forging
Die pressing and sintering

Slika 7.30 Popis proizvodnih procesa oblikovanja koji zadovoljavaju sva postavljena ograničenja

Hladno kovanje u zatvorenom kalupu

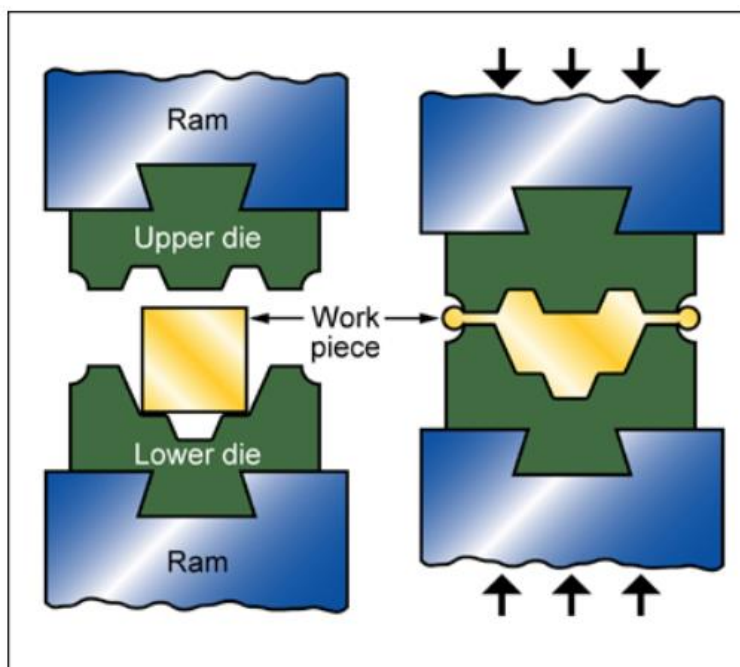
Kod kovanja u hladnom zatvorenom kalupu, sirovac se postavlja u kalup i oblikuje pomoću lokaliziranim tlačnim silama koje se ostvaruju pomoću čekića ili preše.

Hladnim kovanjem proizvode se komponente s većom preciznošću i završnom obradom površine te većom čvrstoćom od vruće kovanih. Za deformaciju su potrebne veće sile koje zahtijevaju robusniju opremu.

Proces se općenito izvodi na sobnoj temperaturi, ali i, u nekim slučajevima, na blago povišenim temperaturama kako bi se osigurala povećana duktilnost.

Na ovaj način mogu se proizvesti komponente od neuobičajenih materijala ili smjese materijala. Proces može biti prikladan za bilo koji materijal, ali se uglavnom koristi za metale i keramike.

Višedijelni kalupi se ne mogu koristiti zbog više tehničkih razloga što nameće ograničenja oblika. Zbog visoke abrazivne prirode metalnog praha, matrice se izrađuju od čelika ili volfram karbida, te je stoga njihova cijena visoka.



Slika 7.31 Proces hladnog kovanja u zatvorenom kalupu

Dostupni atributi za modeliranje troškova za proces površinske obrade manualnog mikropoliranja su prikazani u tablici 7.10.

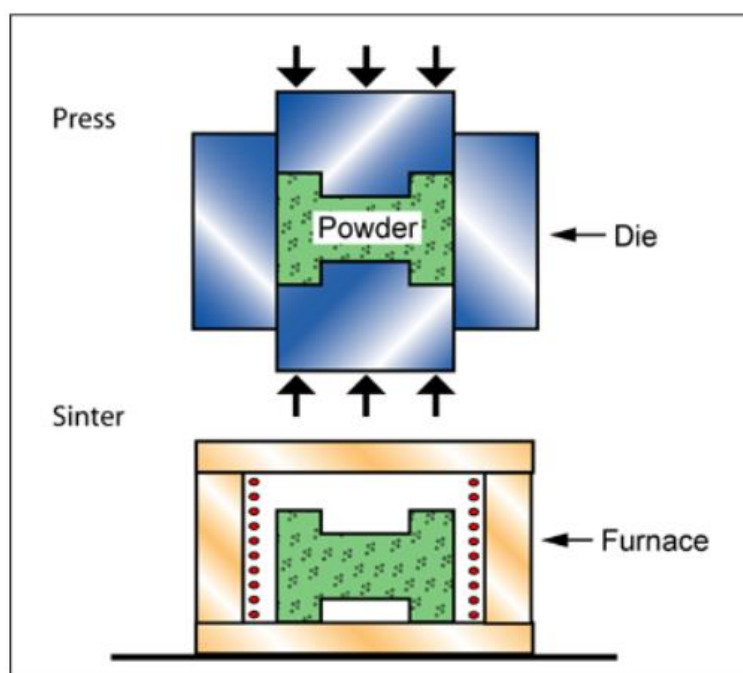
Tablica 7.10 Atributi procesa potrebni za modeliranje troškova za proces hladnog kovanja

Capital cost	①	3,23e5	-	8,07e5	EUR
Material utilization fraction	①	0,85	-	0,95	
Production rate (units)	①	100	-	500	/hr
Tool life (units)	①	1e3	-	1e6	
Tooling cost	①	4,84e3	-	1,45e4	EUR

Prešanje u kalupu i sraštanje

U kalupu za prešanje i sraštanje, metalni ili keramički prah se miješaju i zatim prešaju u zatvorenom kalupu kako bi se formirao kompaktni sirovac željenog oblika.

Sirovac se zatim srašta zagrijavanjem u kontroliranoj atmosferi do temperature neposredno ispod tališta kako bi došlo do difuzijskog povezivanja dodirne površine čestica praha. Atributi za proces oblikovanja u kalupu i sraštanja su prikazani u tablici 7.11.



Slika 7.32 Proces prešanja praha u kalupu uz naknadno sraštanje

Tablica 7.11 Atributi procesa potrebni za modeliranje troškova za proces prešanja i sraštanja

Capital cost	①	* 5,65e5	-	2,26e6	EUR
Material utilization fraction	①	0,9	-	0,99	
Production rate (units)	①	120	-	1,2e3	/hr
Tool life (units)	①	1e4	-	5e4	
Tooling cost	①	4,04e3	-	1,29e4	EUR

Ovisnost jediničnog troška o veličini serije

Za analizu troškova potrebno je još odrediti (procijeniti) podatke za:

- fiksni trošak C_{oh} , €/h;
- vrijeme otpisa: t_{wo} , godina;
- faktor opterećenja: L ;

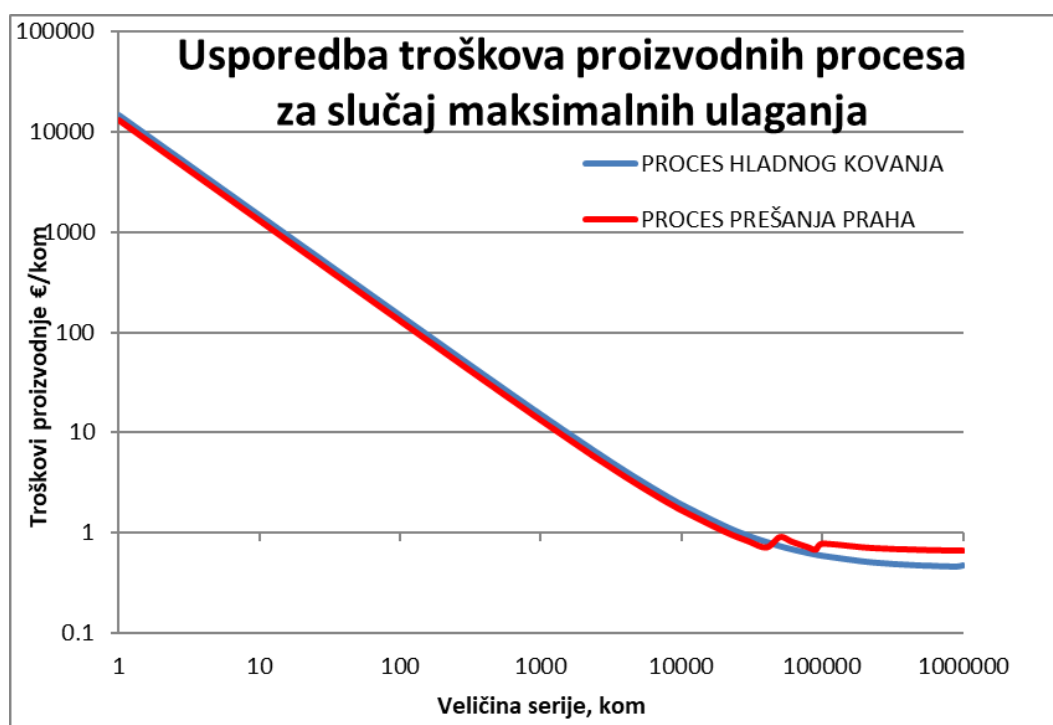
U tablici 7.12 su prikazani svi potrebni atributi za analizu troškova hladnog kovanja, a za analizu troškova prešanja praha uz sraštavanje u tablici 7.13.

Tablica 7.12 Atributi za modeliranje troškova za hladno kovanje

	Donja vrijednost	Gornja vrijednost
Procijenjena masa klipnjače: m , kg	0,35	0,35
Udio otpadnog materijala: f , %	15	5
Cijena materijala: C_m , €/kg	0,66	0,66
Fiksni trošak: C_{oh} , €/h	100,00	100,00
Vrijeme otpisa: t_{wo} , godina	5	5
Faktor opterećenja: L	0,50	0,50
Trošak alata: C_t , €	4840	14500
Kapitalni trošak: C_c , €	32300	80700
Stopa proizvodnje: $\tilde{n}$, kom/h	100	500
Vijek trajanja alata: n_t , kom	1000	1000000

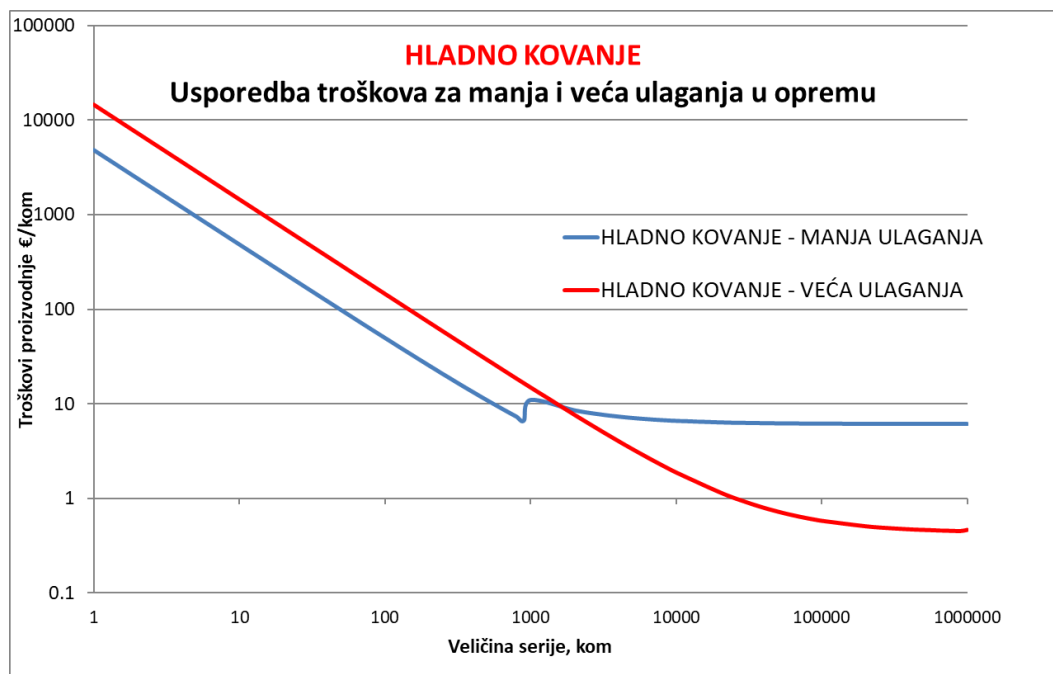
Tablica 7.13 Atributi za modeliranje troškova za prešanje praha i sraštavanje

	Donja vrijednost	Gornja vrijednost
Procijenjena masa klipnjače: m , kg	0,35	0,35
Udio otpadnog materijala: f , %	10	1
Cijena materijala: C_m , €/kg	0,66	0,66
Fiksni trošak: C_{oh} , €/h	100,00	100,00
Vrijeme otpisa: t_{wo} , godina	5	5
Faktor opterećenja: L	0,50	0,50
Trošak alata: C_t , €	4040	12900
Kapitalni trošak: C_c , €	56500	2260000
Stopa proizvodnje: $\tilde{n}$, kom/h	120	1200
Vijek trajanja alata: n_t , kom	1000	50000



Slika 7.33 Usporedba troškova procesa prešanja praha uz sraštavanje i hladnog kovanja

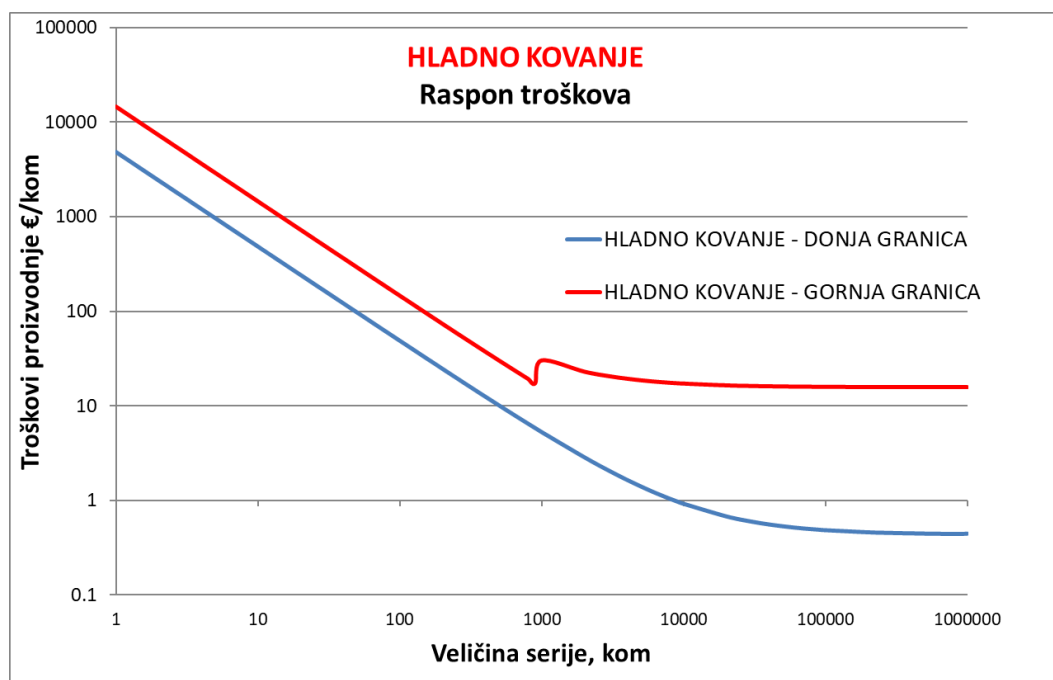
Za seriju od 10000 komada neznatno nižu cijenu po komadu osigurava proces prešanja praha. Ipak, zbog znatno većih kapitalnih troškova izbor je proces hladnog kovanja.



Slika 7.34 Usporedba troškova za proizvodni proces hladno kovanje za manja i veća ulaganja u opremu

Na temelju podataka u dijagram troškova proizvodnje (slika 7.34) može se zaključiti da je, u slučaju većih ulaganja u opremu (slika 7.2), za očekivati (za planiranu seriju od 10000 komada) trošak materijala i proizvodnje od **1,89 €/kom**. U slučaju manjih ulaganja u opremu trošak se penje na **6,57 €/kom**.

Dijagram raspon mogućih troškova ovisno o veličini serije prikazan je na slici 7.35.



Slika 7.35 Raspon troškova proizvodnje za proizvodni proces hladno kovanje

Zaključak

U slučaju većih ulaganja u proizvodni proces vrijeme potrebno za proizvodnju planirane serije bi bilo 20 sati uz postizanje troška od 1,89 €/kom. Ako bi se odlučili na manja ulaganja ovo vrijeme se povećava na 100 sati uz trošak od 6,57 €/kom.

Iako bi se na prvi pogled prema provedenoj analizi moglo zaključiti da je najbolji konačni izbor hladno kovanje i to sa većim ulaganjima u opremu i alate, u ovom slučaju možda to i nije opravdano. Naime, da bi se u potpunosti amortizirao stroj bilo bi potrebno veličina serije od 21.900.000 komada. Dakle, za seriju od 10000 komada, biti će amortizirano svega 0,045% nabavljene opreme.

U slučaju manjih ulaganja u opremu za potpunu amortizaciju bi bila potrebna veličina serije od 4.380.000 komada što bi za planiranu seriju značilo da će se amortizirati 0,23% opreme što je ponovno preniska vrijednost amortizacije.

U oba slučaja, ukoliko se nabavljena oprema ne koristi za proizvodnju i drugih proizvoda ili davanje usluga prema tržištu, očito je da ovakav pristup nema ekonomskog opravdanja. U tom slučaju bi trebalo promisliti o traženju usluge proizvodnje od tvrtke koja ima odgovarajući proizvodni proces.

Mapa u kojoj se nalaze excel datoteke sa svim generiranim dijagramima dostupna je na poveznici u mapi pod nazivom „Zadatak 7.1.2.“:

<https://moodle.oss.unist.hr/mod/folder/view.php?id=50644>

8 Literatura

- [1] Michael F. Ashby: „Materials Selection in Mechanical Design“ Fourth Edition, Published by Elsevier Ltd., 2011.
- [2] Michael F. Ashby, Hugh Shercliff and David Cebon: „Materials, Engineering, Science, Processing and Design“, First Edition, University of Cambridge, UK, 2007.
- [3] Alfiredić, I. NAUKA O ČVRSTOĆI I, Tehnička knjiga Zagreb, 1989.
- [4] EduPack. Ansys Granta, 2019.